$\boxed{\textbf{Diferenciální rovnice}}$

(Obyčejná) diferenciální rovnice n-tého řádu:

$$\boxed{F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0}$$

Řešení na intervalu I: funkce $y\colon I \to \mathbb{R}$ taková, že pro každé $x \in I$ je $F\big(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)\big) = 0$.

Maximální řešení: neexistuje řešení na větším intervalu.

Cauchyova úloha: navíc *počáteční podmínky*

$$y(x_0) = y_{0,0}, \quad y'(x_0) = y_{0,1}, \quad \ldots \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{0,n-1}$$

Cauchyova úloha je *jednoznačně řešitelná*, jestliže každá dvě řešení splývají na některém okolí x_0.

Věta. *Je-li f spojitá funkce na $I \times J$ (I, J intervaly), $x_0 \in I$, $y_0 \in J$, pak Cauchyova úloha $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ má řešení na intervalu $I' \subset I$. Je-li navíc $\frac{\partial f}{\partial y}$ omezená na $I \times J$, pak je Cauchyova úloha jednoznačně řešitelná.*

Poznámky.
1) $f(x, y) = g(x)\, h(y)$: stačí spoj. g, h, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = g(x)\, h'(y)$.
2) $f(x, y) = p(x)\, y + q(x)$: stačí spoj. p, q, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = p(x)$.

DR 1. řádu se separovanými proměnými

$$\boxed{y' = g(x)\, h(y)}$$

Předpoklady: g spojitá na intervalu I, h spojitá na intervalu J.

1) $h(y_1) = 0 \ldots\ y(x) = y_1$, $x \in I$ je *stacionární* řešení
2) $h(y) \neq 0$

$$\begin{aligned} y'(x) &= g(x)\, h\big(y(x)\big) \\ \int \frac{y'(x)}{h\big(y(x)\big)}\, \mathrm{d}x &= \textstyle\int g(x)\, \mathrm{d}x \\ \int \frac{\mathrm{d}y}{h(y)} &= \textstyle\int g(x)\, \mathrm{d}x \ (+\, c) \\ y(x) &= \ldots \end{aligned}$$

Cauchyova úloha

Dopočítat c nebo

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{\mathrm{d}y}{h(y)} = \int_{x_0}^{x} g(x)\, \mathrm{d}x$$

Obecný postup:
1) Maximální intervaly spojitosti g (I).
2) Stacionární řešení $y(x) = y_1$, $x \in I$ pro $h(y_1) = 0$.
3) Maximální intervaly spojitosti a nenulovosti h (J).
4) Pro $(x_0, y_0) \in I \times J$, existuje řešení uvnitř $I \times J$.

Lineární diferenciální rovnice 1. řádu

$$\boxed{a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = f(x)}$$

Předpoklady: a_1, a_0, f spojité na intervalu I, $a_1 \neq 0$ na I. Cauchyova úloha má pak právě jedno řešení na I.

$D\colon\ y \mapsto a_1 y' + a_0 y$ je lineární zobrazení na prostoru funkcí diferencovatelných na I.

Přidružená homogenní rovnice: $a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = 0$. Množina řešení je jádro lineárního zobrazení D.

Obecné řešení: $y(x) = \tilde{y}(x) + \hat{y}(x)$, kde $\tilde{y}$ je obecné řešení přidružené homogenní rovnice a $\hat{y}$ je jedno (*partikulární*) řešení původní rovnice.

Vydělením $a_1(x)$ dostaneme LDR ve tvaru (p, q spojité):

$$\boxed{y' + p(x)\, y = q(x)}$$

Homogenní LDR 1. řádu

$$\boxed{y' + p(x)\, y = 0}$$

Řešíme separací proměnných:

$$y(x) = c\, \mathrm{e}^{-\int p(x)\, \mathrm{d}x}, \quad x \in I, \qquad (c \in \mathbb{R})$$

Nehomogenní LDR 1. řádu

$$\boxed{y' + p(x)\, y = q(x)}$$

Metoda *variace konstanty*: hledáme partikulární řešení ve tvaru obecného řešení přidružené homogenní rovnice, ve kterém konstantu nahradíme funkcí.

$$\hat{y}(x) = c(x)\, \mathrm{e}^{-\int p(x)}$$

Dosadíme do rovnice a spočítáme $c(x)$:

$$\begin{aligned} & c'(x)\, \mathrm{e}^{-\int p(x)} - c(x)\, \mathrm{e}^{-\int p(x)}\, p(x) + p(x)\, c(x)\, \mathrm{e}^{-\int p(x)} = q(x) \\ & c'(x) = q(x)\, \mathrm{e}^{\int p(x)} \\ & c(x) = \textstyle\int q(x)\, \mathrm{e}^{\int p(x)} \\ & \hat{y}(x) = \mathrm{e}^{-\int p(x)} \cdot \textstyle\int q(x)\, \mathrm{e}^{\int p(x)} \end{aligned}$$

Cauchyova úloha pro LDR 1. řádu

$$\boxed{\begin{aligned} y' + p(x)\, y &= q(x) \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned}}$$

1) Obecné řešení přidružené homogenní rovnice separací proměnných.
2) Partikulární řešení metodou variace konstanty, obecné řešení dané LDR.
3) Určení konstanty dosazením počáteční podmínky.

Lineární diferenciální rovnice

$$\boxed{y^{(n)} + a_{n-1}(x)\,y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)\,y' + a_0(x)\,y = f(x)}$$

Věta. *Jsou li $a_{n-1}, \ldots, a_0, f$ spojité funkce na intervalu I, pak Cauchyova úloha má právě jedno řešení na I.*

Homogenní LDR ($f(x) = 0$ na I)

Věta. *Množina řešení homogenní LDR řádu n tvoří lineární prostor dimenze n.*

Důkaz. $D\colon\, y \mapsto y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0$ je lineární zobrazení, množina řešení je jeho jádro, tj. lineární prostor.

$y(x_0)$	$y'(x_0)$	$\ldots$	$y^{(n-1)}(x_0)$		řešení C. úlohy
1	0	$\ldots$	0	$\to$	$y_0(x)$
0	1	$\ldots$	0	$\to$	$y_1(x)$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
0	0	$\ldots$	1	$\to$	$y_{n-1}(x)$
$y_{0,0}$	$y_{0,1}$	$\cdots$	$y_{0,n-1}$	$\to$	$\sum_{i=0}^{n-1} y_{0,i} y_i(x)$

$\Rightarrow$ lineární obal $\{y_0(x), \ldots, y_{n-1}(x)\}$ je celý prostor řešení

$$\begin{aligned}
A_0\,y_0(x) + \cdots + A_{n-1}\,y_{n-1}(x) = 0 &\xrightarrow{x=x_0} A_0 = 0 \\
{}'\colon\; A_0\,y_0'(x) + \cdots + A_{n-1}\,y_{n-1}'(x) = 0 &\xrightarrow{x=x_0} A_1 = 0 \quad \ldots
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ funkce $y_0(x), \ldots, y_{n-1}(x)$ jsou lineárně nezávislé

Definice. Báze množiny řešení homogenní LDR se nazývá *fundamentální systém* řešení.

Věta. *Nechť $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ jsou řešení homogenní LDR řádu n na intervalu I. Tyto funkce jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když pro každé $x \in I$ je následující determinant (*Wronského, wronskián*) nenulový:*

$$\begin{vmatrix}
y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\
y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x)
\end{vmatrix}$$

Důkaz. 1) Jsou-li funkce závislé, pak některá y_i je lineární kombinací ostatních, y_i' je stejnou kombinací derivací ostatních, $\ldots$ i-tý sloupec determinantu je kombinací ostatních, tj. determinant je nulový pro každé $x \in I$.
2) Je-li determinant nulový v x_0, pak homogenní soustava rovnic s touto maticí má netriviální řešení $(A_1, \ldots, A_n)$, $A_1\,y_1(x) + \cdots + A_n\,y_n(x)$ je řešení s nulovými počátečními podmínkami v x_0, tj. nulové, tj. dané funkce jsou závislé.

Poznámka. Věta neplatí, pokud funkce nejsou řešením jedné LDR.

Nehomogenní LDR

Věta. *1) Je-li y řešení LDR a $\tilde{y}$ řešení přidružené homogenní rovnice, pak $y + \tilde{y}$ je řešení dané LDR.*
2) Jsou-li y_1, y_2 řešení LDR, pak $y_1 - y_2$ je řešení přidružené homogenní rovnice.
*3) Jsou-li y_1, y_2 řešení pro pravé strany f_1, f_2, pak $y_1 + y_2$ je řešení pro pravou stranu $f_1 + f_2$ (*princip superpozice*).*

LDR s konstantními koeficienty

$$\boxed{a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f(x)}$$

Předpoklady: $a_n \neq 0$, f je spojitá na intervalu.

Homogenní LDR s konstantními koeficienty

Charakteristická rovnice:

$$a_n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0\,.$$

Věta. *1) Je-li λ reálný kořen charakteristické rovnice násobnosti k, pak funkce*

$$\mathrm{e}^{\lambda x}, \quad x\,\mathrm{e}^{\lambda x}, \quad \ldots, \quad x^{k-1}\,\mathrm{e}^{\lambda x}$$

jsou řešením příslušné homogenní LDR.
2) Je-li $\alpha + \beta\,\mathrm{j}$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) imaginární kořen charakteristické rovnice násobnosti k, pak funkce

$$\begin{aligned}
&\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x, \quad x\,\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x, \quad \ldots, \quad x^{k-1}\,\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x, \\
&\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x, \quad x\,\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x, \quad \ldots, \quad x^{k-1}\,\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x,
\end{aligned}$$

jsou řešením příslušné homogenní LDR.
3) Všechna tato řešení tvoří fundamentální systém řešení.

Nehomogenní LDR s konstantními koeficienty

Hledáme partikulární řešení.

1) *Variace konstant*:

$$\begin{aligned}
\tilde{y}(x) &= c_1 y_1(x) + \cdots + c_n y_n(x) \\
\hat{y}(x) &= c_1(x)\,y_1(x) + \cdots + c_n(x)\,y_n(x) \\
\hat{y}'(x) &= c_1(x)\,y_1'(x) + \cdots + c_n(x)\,y_n'(x) \\
&\quad + \underbrace{c_1'(x)\,y_1(x) + \cdots + c_n'(x)\,y_n(x)}_{=0} \\
\hat{y}''(x) &= c_1(x)\,y_1''(x) + \cdots + c_n(x)\,y_n''(x) \\
&\quad + \underbrace{c_1'(x)\,y_1'(x) + \cdots + c_n'(x)\,y_n'(x)}_{=0} \\
&\vdots \\
\hat{y}^{(n)}(x) &= c_1(x)\,y_1^{(n)}(x) + \cdots + c_n(x)\,y_n^{(n)}(x) \\
&\quad + c_1'(x)\,y_1^{(n-1)}(x) + \cdots + c_n'(x)\,y_n^{(n-1)}(x)
\end{aligned}$$

2) *Metoda odhadu* pro kvazipolynomiální pravou stranu: Jsou-li P, Q polynomy stupně nejvýše m, $(\alpha + \beta\,\mathrm{j})$ k-násobný kořen charakteristického polynomu,

$$f(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}\bigl(P(x)\cos\beta x + Q(x)\sin\beta x\bigr),$$

pak existuje partikulární řešení ve tvaru

$$\hat{y}(x) = x^k\,\mathrm{e}^{\alpha x}\bigl(\hat{P}(x)\cos\beta x + \hat{Q}(x)\sin\beta x\bigr),$$

kde $\hat{P}, \hat{Q}$ jsou polynomy stupně nejvýše m.

Laplaceova transformace

Definice. *Laplaceovým obrazem* funkce f definované na $\langle 0,\infty)$ je funkce

$$F(p)=\int_0^\infty f(t)\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t\,,$$

pokud integrál konverguje pro alespoň jedno $p\in\mathbb{R}$.

Značení: $\mathscr{L}: f(t)\mapsto F(p)$, $\mathscr{L}\{f\}=F$, $f\triangleq F$.

Příklady. e^{t^2} nemá Laplaceův obraz

$$\mathscr{L}\{\mathrm{e}^{at}\}=\frac{1}{p-a}\,,\quad p>a$$

$$\mathscr{L}\{1\}=\frac{1}{p}\,,\quad p>0$$

Poznámky. 1) F se obvykle uvažuje jako funkce komplexní proměnné pro $\operatorname{Re}p>p_f$.
2) Někdy se uvažují funkce $f(t)$ definované na $\mathbb{R}$, které jsou nulové pro $t<0$ – místo $\sin t$ na $\langle 0,\infty)$ se píše $\sin t\cdot\mathrm{H}(t)$, kde $\mathrm{H}(t)$ je tzv. *Heavisideova funkce* (někdy se bere $H(0)=\frac12$):

$$\mathrm{H}(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ 1, & t\ge 0.\end{cases}$$

Věta (o linearitě). *Jsou-li $f,g\in\mathscr{L}_0$ exponenciálního řádu α, $a,b\in\mathbb{R}$, pak*

$$\mathscr{L}\{af+bg\}=a\,\mathscr{L}\{f\}+b\,\mathscr{L}\{g\}\,,\quad (p>\alpha)\,.$$

Důkaz. Přímý důsledek linearity integrálu.

Věta (o derivaci obrazu). *Je-li $f\in\mathscr{L}_0$ exponenciálního řádu α, $F=\mathscr{L}\{f\}$, pak*

$$\mathscr{L}\{t\cdot f(t)\}=-F'(p)\,,\quad p>\alpha\,.$$

Důkaz (náznak). $F'(p)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\int_0^\infty f(t)\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t=$
$=\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left(f(t)\,\mathrm{e}^{-pt}\right)\mathrm{d}t=\int_0^\infty f(t)\,(-t)\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t=$
$=-\int_0^\infty\big(t\,f(t)\big)\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t=-\mathscr{L}\{t\,f(t)\}$

Příklad.

$$\mathscr{L}\{t^n\}=\frac{n!}{p^{n+1}}\,,\quad p>0\,.$$

Věta (o integraci obrazu). *Je-li $f\in\mathscr{L}_0$ exponenciálního řádu α, $F=\mathscr{L}\{f\}$ a existuje-li vlastní $\lim_{t\to0+}\frac{f(t)}{t}$, pak*

$$\mathscr{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}=\int_p^\infty F(q)\,\mathrm{d}q\,,\quad p>\alpha\,.$$

Poznámka. $\mathscr{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}=-\int F(p)$, integrační konstanta se určí z podmínky $\lim_{p\to\infty}F(p)=0$.

Definice. Funkce $f(t)$ definovaná na $\langle 0,\infty)$ je *předmět standardního typu* (*f patří do třídy $\mathscr{L}_0$*), jestliže:
1) f je po částech spojitá,
2) f je *exponenciálního řádu* (α), tj. existují čísla $M,\alpha\in\mathbb{R}$:

$$|f(t)|\le M\,\mathrm{e}^{\alpha t},\quad t\in\langle 0,\infty)\,.$$

Věta. *Nechť f je předmět standardního typu exponenciálního řádu α. Pak Laplaceův obraz funkce f je definován na (α,∞) a $\lim_{p\to\infty}F(p)=0$.*

Důkaz. $\left|\int_0^\infty f(t)\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t\right|\le\int_0^\infty|f(t)\,\mathrm{e}^{-pt}|\,\mathrm{d}t\le$
$\le\int_0^\infty M\,\mathrm{e}^{\alpha t}\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t=\int_0^\infty M\,\mathrm{e}^{-(p-\alpha)t}\,\mathrm{d}t=$
$=\left[-\frac{M}{p-\alpha}\,\mathrm{e}^{-(p-\alpha)t}\right]_0^\infty=\frac{M}{p-\alpha}$ pro $p>\alpha$.

Příklady.

$$\mathscr{L}\{\sin t\}=\frac{1}{p^2+1}\,,\quad p>0$$

$$\mathscr{L}\{\cos t\}=\frac{p}{p^2+1}\,,\quad p>0$$

Věta (o substituci [posunu] v obrazu). *Je-li $f\in\mathscr{L}_0$ exponenciálního řádu α, $F=\mathscr{L}\{f\}$, $a\in\mathbb{R}$, pak*

$$\mathscr{L}\{\mathrm{e}^{at}\,f(t)\}=F(p-a)\,,\quad p>\alpha+a\,.$$

Důkaz. $|\,\mathrm{e}^{at}\,f(t)|\le\mathrm{e}^{at}\,M\,\mathrm{e}^{\alpha t}=M\,\mathrm{e}^{(\alpha+a)t}$
$\int_0^\infty\mathrm{e}^{at}\,f(t)\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t=\int_0^\infty f(t)\,\mathrm{e}^{(a-p)t}\,\mathrm{d}t=F(p-a)$

Příklad. $\mathscr{L}\{\mathrm{e}^{at}\sin t\}=\frac{1}{(p-a)^2+1}$, $p>a$

Věta (o změně měřítka). *Je-li $f\in\mathscr{L}_0$ exponenciálního řádu α, $F=\mathscr{L}\{f\}$, $a>0$, pak*

$$\mathscr{L}\{f(at)\}=\frac{1}{a}\,F\left(\frac{p}{a}\right)\,,\quad p>a\cdot\alpha\,.$$

Důkaz. $|f(at)|\le M\,\mathrm{e}^{\alpha(at)}=M\,\mathrm{e}^{(a\alpha)t}$
$\int_0^\infty f(at)\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t=\left|\begin{array}{c}at=u\\ a\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}u\end{array}\right|=\frac{1}{a}\int_0^\infty f(u)\,\mathrm{e}^{-(p/a)u}\,\mathrm{d}u=$
$\frac{1}{a}\,F\left(\frac{1}{a}\right)$

Příklady.

$$\mathscr{L}\{\sin\omega t\}=\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\,,\quad p>0$$

$$\mathscr{L}\{\cos\omega t\}=\frac{p}{p^2+\omega^2}\,,\quad p>0$$

Zpětná Laplaceova transformace

Věta. *Jsou-li $f_1, f_2 \in \mathscr{L}_0$ exponenciálního řádu α, $\mathscr{L}\{f_1\} = \mathscr{L}\{f_2\}$ na (α,∞), pak $f_1(t) = f_2(t)$ na $\langle 0,\infty)$ s výjimkou nejvýše spočetně mnoha izolovaných bodů.*

Věta. *Racionální funkce je Laplaceovým obrazem funkce třídy $\mathscr{L}_0$ právě tehdy, když je ryze lomená. Pak je obrazem na intervalu (α,∞), kde α je největší reálná část kořenů jmenovatele.*

Důkaz. $\Rightarrow$: $\lim_{p\to\infty} F(p) = 0$
$\Leftarrow$: rozklad na součet parciálních zlomků, linearita

$$\mathscr{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{p-a}\,, \qquad \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p-a}\right\} = e^{at}$$

$$\mathscr{L}\{t^n e^{at}\} = \frac{n!}{(p-a)^{n+1}}\,, \quad \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(p-a)^n}\right\} = \frac{t^{n-1} e^{at}}{(n-1)!}$$

pro kvadratické členy ve jmenovateli:

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{p+C}{(p^2+bp+c)^n}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{(p+\frac{b}{2})+(C-\frac{b}{2})}{[(p+\frac{b}{2})^2+c-\frac{1}{4}b^2]^n}\right\}$$

$$= e^{-\frac{b}{2}t}\Bigg[\underbrace{\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{p}{(p^2+\omega^2)^n}\right\}}_{f_n(t)} + \frac{2C-b}{2}\underbrace{\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(p^2+\omega^2)^n}\right\}}_{g_n(t)}\Bigg]$$

$$f_1(t) = \cos\omega t\,, \qquad f_{n+1}(t) = \tfrac{1}{2n}\, t\, g_n(t)$$
$$g_1(t) = \tfrac{1}{\omega}\sin\omega t\,, \quad g_{n+1}(t) = \tfrac{1}{2n\omega^2}\,[(2n-1)\,g_n(t) - t\,g_n'(t)]$$

Definice. *Konvoluce* funkcí $f,g \in \mathscr{L}_0$ je funkce

$$(f*g)(t) = \int_0^t f(t-u)\,g(u)\,du\,.$$

Vlastnosti:
1) komutativita: $f*g = g*f$
2) asociativita: $(f*g)*h = f*(g*h)$
3) distributivita ke sčítání: $f*(g+h) = (f*g)+(f*h)$

Věta (o obrazu konvoluce). *Jsou-li $f,g \in \mathscr{L}_0$ exponenciálního řádu α, $F = \mathscr{L}\{f\}$, $G = \mathscr{L}\{g\}$, pak*

$$\mathscr{L}\{(f*g)(t)\} = F(p)\cdot G(p)\,, \quad p > \alpha\,.$$

Důkaz (náznak). $\int_0^\infty \big(\int_0^t f(t-u)\,g(u)\,du\big)\,e^{-pt}\,dt =$
$= \int_0^\infty \int_u^\infty f(t-u)\,g(u)\,e^{-pt}\,dt\,du =$
$= \int_0^\infty g(u)\,e^{-pu}\big(\int_u^\infty f(t-u)\,e^{-p(t-u)}\,dt\big)\,du \overset{(t-u=v)}{=}$
$= \int_0^\infty g(u)\,e^{-pu}\big(\int_0^\infty f(v)\,e^{-pv}\,dv\big)\,du =$
$= \big(\int_0^\infty f(v)\,e^{-pv}\,dv\big)\cdot\big(\int_0^\infty g(u)\,e^{-pu}\,du\big) = F(p)\cdot G(p)$

Poznámky.
1) $\mathscr{L}^{-1}\{F(p)\cdot G(p)\} = (f*g)(t)$.
2) $(\mathrm{H}*f)(t) = \int_0^t f(t)\,dt$, tj. věta o obrazu integrálu je zvláštním případem věty o obrazu konvoluce.

Diferenciální a integrálně diferenciální rovnice

Zobrazíme Laplaceovou transformací, vyřešíme algebraickou rovnici, provedeme zpětnou transformaci.

Věta (o obrazu derivace). *Je-li $f' \in \mathscr{L}_0$ exponenciálního řádu α, $F = \mathscr{L}\{f\}$ a $f(0+) = \lim_{t\to 0+} \in \mathbb{R}$, pak*

$$\mathscr{L}\{f'(t)\} = p\cdot F(p) - f(0+)\,, \quad (p > \max\{\alpha, 0\})\,.$$

Důkaz. $\int_0^\infty f'(t)\,e^{-pt}\,dt = \left|\begin{array}{ll} u = e^{-pt} & v' = f'(t) \\ u' = -p\,e^{-pt} & v = f(t)\end{array}\right| =$

$= \big[f(t)\,e^{-pt}\big]_0^\infty + \int_0^\infty p\,f(t)\,e^{-pt}\,dt = -f(0+) + p\cdot F(p)$

Důsledek.

$$\mathscr{L}\{f^{(n)}\} = p^n\,\mathscr{L}\{f\} - \\ - p^{n-1}f(0+) - \cdots - p\,f^{(n-2)}(0+) - f^{(n-1)}(0+)$$

Věta (o obrazu integrálu). *Je-li $f \in \mathscr{L}_0$ exponenciálního řádu α, $F = \mathscr{L}\{f\}$, pak*

$$\mathscr{L}\big\{\int_0^t f(u)\,du\big\} = \frac{F(p)}{p}\,, \quad (p > \max\{\alpha,0\})\,.$$

Důkaz. $g(t) = \int_0^t f(u)\,du$, $g(0+) = 0$
$F(p) = \mathscr{L}\{g'(t)\} = p\,\mathscr{L}\{g(t)\} - g(0+) = p\,\mathscr{L}\{g(t)\}$

Věta (o translaci). *Je-li $f \in \mathscr{L}_0$ exponenciálního řádu α, $a \geq 0$, pak*

$$\mathscr{L}\{f(t)\,\mathrm{H}(t-a)\} = e^{-ap}\,\mathscr{L}\{f(t+a)\}\,, \quad p > \alpha$$
$$\mathscr{L}\{f(t-a)\,\mathrm{H}(t-a)\} = e^{-ap}\,\mathscr{L}\{f(t)\}\,, \quad p > \alpha$$

Důkaz. $\mathscr{L}\{f(t-b)\,\mathrm{H}(t-a)\} =$
$= \int_0^\infty f(t-b)\,\mathrm{H}(t-a)\,e^{-pt}\,dt = \int_a^\infty f(t-b)\,e^{-pt}\,dt \overset{(t-a=u)}{=}$
$= \int_0^\infty f(u+a-b)\,e^{-p(u+a)}\,du = e^{-ap}\,\mathscr{L}\{f(t+a-b)\}$
první vztah dostaneme pro $b=0$, druhý pro $b=a$

Konečný impuls: $f(t)$ na omezeném intervalu $\langle a,b)$:

$$f(t)\cdot[\,\mathrm{H}(t-a) - \mathrm{H}(t-b)]\,.$$

Věta (o obrazu periodické funkce). *Je-li $f \in \mathscr{L}_0$ periodická funkce s periodou T, pak f je exponenciálního řádu 0 a její obraz je*

$$F(p) = \frac{\int_0^T f(t)\,e^{-pt}\,dt}{1-e^{-pT}}\,, \quad p > 0\,.$$

Důkaz. $\int_0^\infty f(t)\,e^{-pt}\,dt =$
$= \sum_{n=0}^\infty \int_{nT}^{(n+1)T} f(t)\,e^{-pt}\,dt = \left|\begin{array}{c} t = u+nT \\ dt = du\end{array}\right| =$
$= \sum_{n=0}^\infty \int_0^T f(u)\,e^{-p(u+nT)}\,du =$
$= \sum_{n=0}^\infty (e^{-pT})^n \int_0^T f(u)\,e^{-pu}\,du =$
$= \big(\int_0^T f(u)\,e^{-pu}\,du\big)/(1-e^{-pT})$

$\boxed{\textbf{Prostory } \mathbb{R}^n}$

Euklidovský prostor $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$: n-rozměrné aritmetické vektory $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ s operacemi

$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$	součet
$a\boldsymbol{x} = (ax_1, \ldots, ax_n)$	skalární násobek
$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$	skalární součin

počátek O kartézského systému souřadnic, bodový prostor

1) $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $\boldsymbol{e}_n = (0, 0, \ldots, 1)$ tvoří (standardní) ortonormální bázi $\mathbb{R}^n$.
2) *Nulový vektor*: $\boldsymbol{o} = (0, 0, \ldots, 0)$.
3) *Norma* (euklidovská): $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$.
4) Vzájemně jednoznačná korespondence mezi body a vektory: $X = O + \boldsymbol{x}$.
5) *Vzdálenost bodů* X, Y: $\|\overrightarrow{XY}\| = \|Y - X\|$.

Základní vlastnosti normy:
(1) $\|\boldsymbol{x}\| > 0$ pro $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{o}$ $(\|\boldsymbol{o}\| = 0)$,
(2) $\|a \cdot \boldsymbol{x}\| = |a| \cdot \|\boldsymbol{x}\|$,
(3) $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$ (trojúhelníková nerovnost).

Další vlastnosti:
1) $|\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}| \leq \|\boldsymbol{x}\| \cdot \|\boldsymbol{y}\|$ (Schwarzova nerovnost pro eukl. normu),
2) $\max_{i=1,\ldots,n} |x_i| \leq \|\boldsymbol{x}\| \leq \sqrt{n} \cdot \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|$.

Důkaz (2). Odmocníme
$\max_{i=1,\ldots,n} x_i^2 \leq x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq n \cdot \max_{i=1,\ldots,n} x_i^2$

Poznámky.
Supremová norma: $\|\boldsymbol{x}\|_{\mathrm{M}} = \sup\{|x_i| : i = 1, \ldots, n\}$.
Součtová norma: $\|\boldsymbol{x}\|_{\mathrm{S}} = |x_i| + \cdots + |x_n|$.
Všechny normy jsou ekvivalentní:

$$\|\boldsymbol{x}\|_{\mathrm{M}} \leq \|\boldsymbol{x}\| \leq \|\boldsymbol{x}\|_{\mathrm{S}} \leq n \cdot \|\boldsymbol{x}\|_{\mathrm{M}}\,.$$

Definice. *Diametr* (*průměr*) neprázdné množiny $M \subset \mathbb{R}^n$:

$$\mathrm{diam}(M) = \sup\{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| : x, y \in M\}\,.$$

Poznámka. $\mathrm{diam}(\emptyset) = 0$.

Definice. Množina $M \subset \mathbb{R}^n$ se nazývá *omezená*, má-li konečný diametr.

Poznámka. Množina je omezená právě tehdy, když jsou omezené vzdálenosti jejích bodů od počátku, tj. omezené jsou množiny všech souřadnic.

Definice. *ε-okolí bodu* $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$:

$$U(\boldsymbol{x}, \varepsilon) = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n : \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}\| < \varepsilon\}\,.$$

Prstencové ε-okolí bodu $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$:

$$P(\boldsymbol{x}, \varepsilon) = U(\boldsymbol{x}, \varepsilon) \setminus \{\boldsymbol{x}\} = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n : 0 < \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}\| < \varepsilon\}\,.$$

Definice. Nechť $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $M \subset \mathbb{R}^n$. Řekneme, že $\boldsymbol{x}$ je
1) *vnitřní bod* M, pokud existuje okolí $U(\boldsymbol{x}, \varepsilon) \subset M$,
2) *vnější bod* M, pokud existuje okolí $U(\boldsymbol{x}, \varepsilon)$ disjunktní s M (tj. $M \subset \mathbb{R}^n \setminus M$),
3) *hraniční bod* M, pokud každé okolí bodu $\boldsymbol{x}$ má neprázdný průnik s M i s $(\mathbb{R}^n \setminus M)$,
4) *hromadný bod* M, pokud každé prstencové okolí bodu $\boldsymbol{x}$ má neprázdný průnik s M,
5) *izolovaný bod* M, pokud existuje prstencové okolí bodu $\boldsymbol{x}$ disjunktní s M.

Definice. Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$.
1) *Vnitřek* M (M^0) je množina všech vnitřních bodů M.
2) *Hranice* M (∂M) je množina všech hraničních bodů M.
3) *Uzávěr* M $(\overline{M})$ je $M^0 \cup \partial M$.

Definice. Množina $M \subset \mathbb{R}^n$ se nazývá
1) *otevřená*, je-li rovna svému vnitřku,
2) *uzavřená*, je-li rovna svému uzávěru.

Poznámky.
1) Množina nemusí být ani otevřená, ani uzavřená.
2) Otevřené a zároveň uzavřené (tzv. obojetné) množiny v $\mathbb{R}^n$ jsou pouze $\emptyset$ a $\mathbb{R}^n$.
3) Jednobodové množiny jsou uzavřené.
4) Množina je otevřená právě tehdy, když její doplněk je uzavřená množina.
5) Průnik dvou a sjednocení libovolně mnoha otevřených množin je otevřená množina.
6) Sjednocení dvou a průnik libovolně mnoha uzavřených množin je uzavřená množina.

Věta. *Každá omezená nekonečná množina v $\mathbb{R}^n$ má alespoň jeden hromadný bod.*

Důkaz (návod). Podobně jako princip vnořených intervalů.

Definice. Množina $M \subset \mathbb{R}^n$ se nazývá *souvislá*, jestliže neexistují otevřené množiny $O_1, O_2 \subset \mathbb{R}^n$ takové, že:
(1) $O_1 \cap O_2 = \emptyset$,
(2) $O_1 \cup O_2 \supset M$,
(3) $O_1 \cap M, O_2 \cap M \neq \emptyset$.

Poznámky.
1) $\emptyset$ a $\mathbb{R}^n$ jsou souvislé.
2) Jednobodové množiny jsou souvislé.
3) Otevřená množina není souvislá právě tehdy, když je sjednocením dvou disjunktních otevřených množin.
4) V $\mathbb{R}$ jsou souvislé $\emptyset$, jednobodové množiny, intervaly (nic jiného).

Věta. *Otevřená množina v $\mathbb{R}^n$ je souvislá právě tehdy, když každé dva její body lze spojit lomenou čarou ležící v této množině.*

Definice. Otevřená souvislá množina se nazývá *oblast*.

Posloupnosti v $\mathbb{R}^n$

Definice. *Posloupnost* v $\mathbb{R}^n$ je zobrazení $\mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned} 1 &\mapsto 1.\ \text{člen}\ \boldsymbol{x}_1 \in \mathbb{R}^n \\ 2 &\mapsto 2.\ \text{člen}\ \boldsymbol{x}_2 \in \mathbb{R}^n \\ &\dots \end{aligned}$$

$(\boldsymbol{x}_k)_{k=1}^{\infty}$

Definice. Posloupnost $(\boldsymbol{x}_k)$ *má limitu* $\boldsymbol{x}$, pokud pro každé okolí U bodu $\boldsymbol{x}$ existuje $k_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro každé $k > k_0$ je $\boldsymbol{x}_k \in U$.

$\boldsymbol{x}_k \in U(\boldsymbol{x}, \varepsilon) \ \dots\ \|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}\| < \varepsilon$
$\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{x} \ \dots\ \lim_{k\to\infty} \|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}\| = 0$

Věta (o konvergenci po složkách). *Nechť $(\boldsymbol{x}_k)$ je posloupnost v $\mathbb{R}^n$. Pak $\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{x}$ právě tehdy, když*

$$\lim_{k\to\infty} x_{k,i} = x_i \quad \text{pro každé } i \in \{1, \dots, n\}.$$

Důkaz. $(k \to \infty)$

$$\begin{array}{ccccc} \max_i |x_{k,i} - x_i| & \leq & \|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}\| & \leq & \sqrt{n} \max_i |x_{k,i} - x_i| \\ \downarrow & \Leftarrow & \downarrow & \Leftarrow & \downarrow \\ 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

Důsledek. *Věty o limitě součtu, rozdílu, násobku, vybrané posloupnosti, jednoznačnosti, … platí i v $\mathbb{R}^n$.*

Funkce v $\mathbb{R}^n$

Definice. *(Reálná) funkce n (reálných) proměnných* je zobrazení $f\colon D(f) \to \mathbb{R}$, kde $D(f) \subset \mathbb{R}^n$ je *definiční obor* funkce f. $R(f) = f(D(f))$ je *obor hodnot* funkce f.

Poznámky.
1) V prostorech „malé“ dimenze místo $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)$ píšeme (x, y), (x, y, z), …
2) Vypouštíme „opakované“ závorky – místo $f((x_1, \dots, x_n))$ píšeme $f(x_1, \dots, x_n)$.
3) Pod pojmem funkce rozumíme reálnou funkci n proměnných.

Definice. *Graf funkce* f je množina

$$\operatorname{Graf} f = \{(\boldsymbol{x}, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : \boldsymbol{x} \in D(f),\ y = f(\boldsymbol{x})\}.$$

Definice. *Hladina konstantnosti* funkce f příslušná $c \in \mathbb{R}$:

$$\{\boldsymbol{x} \in D(f)\colon f(\boldsymbol{x}) = c\} = f^{-1}(c).$$

Řez grafu je průnik grafu s rovinou v $\mathbb{R}^{n+1}$ rovnoběžnou s poslední osou.

Definice. Nechť $M \subset D(f)$. Funkce f má v bodě $\boldsymbol{a}$ *limitu b vzhledem k M*, jestliže $\boldsymbol{a}$ je hromadný bod M a pro každé okolí U bodu b existuje prstencové okolí P bodu $\boldsymbol{a}$ tak, že $f(P \cap M) \subset U$. Píšeme

$$\lim_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{x}\in M}} f(\boldsymbol{x}) = b.$$

(Je-li $M = D(f)$, pak podmínku $\boldsymbol{x} \in M$ nepíšeme.)

Příklad. $n = 1$, $M = (a, \infty)$ … limita zprava.

Věta. *Je-li $\boldsymbol{a}$ hromadný bod $D(f)$, pak $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = b$ právě tehdy, když $\lim_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{x}\in M}} f(\boldsymbol{x}) = b$ pro všechny $M \subset D(f)$ takové, že $\boldsymbol{a}$ je hromadný bod M.*

Příklady.

1) $\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ y=kx}} \frac{x^2y^2}{x^4+y^4} = \frac{k^2}{1+k^4}$
2) $\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ y=kx}} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = 0$, $\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ y=x^2}} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = \frac{1}{2}$
3) $\lim_{x\to0} \lim_{y\to0} \frac{x^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to0} 1 = 1$,
$\lim_{y\to0} \lim_{x\to0} \frac{x^2}{x^2+y^2} = \lim_{y\to0} 0 = 0$

Definice. Funkce f je *spojitá v bodě* $\boldsymbol{a} \in D(f)$, jestliže $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a})$. Funkce je *spojitá*, je-li spojitá v každém bodě svého definičního oboru.

Poznámka. Věty o limitách a spojitosti se dají zobecnit z $n = 1$. (Jednoznačnost limity, limita a spojitost součtu, rozdílu, součinu, podílu, složené funkce, …)

Definice. *Vektorová funkce* je zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^k$.

$F\colon D(F) \to \mathbb{R}^k$, $D(f) \subset \mathbb{R}^n$
$F(x_1, \dots, x_n) = \big(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_k(x_1, \dots, x_n)\big)$
$F = (f_1, \dots, f_k)$
Podobně jako pro posloupnosti vyšetřujeme limity (a tedy i spojitost) „po složkách“, tj. limity (a spojitost) $f_1, \dots, f_k$.

Derivace funkcí více proměnných

Definice. *Parciální derivace funkce* $f(\boldsymbol{x})$ *podle* x_i v bodě $\boldsymbol{a} \in D(f)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) = \varphi'(a_i)$$

pro $\varphi(x_i) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$.

Příklad. $f(x,y) = \mathrm{e}^x + x^2 y$, $\boldsymbol{a} = (1,2)$
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \mathrm{e}^x + 2xy$, $\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = \mathrm{e} + 4$
$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = 1$

Definice. *Gradient* funkce f v bodě $\boldsymbol{a} \in D(f)$:

$$\operatorname{grad} f(\boldsymbol{a}) = \left(\tfrac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}), \dots, \tfrac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{a})\right).$$

Příklad. $f(x,y) = \mathrm{e}^x + x^2 y$
$\operatorname{grad} f(x,y) = (\mathrm{e}^x + 2xy, x^2)$, $\operatorname{grad} f(1,2) = (\mathrm{e}+4, 1)$

Poznámka. $(\operatorname{grad} f)\colon \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n \mapsto \operatorname{grad} f(\boldsymbol{a}) \in \mathbb{R}^n$ je vektorová funkce

$$(\operatorname{grad} f)(\boldsymbol{a}) = \left(\tfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \tfrac{\partial f}{\partial x_n}\right)(\boldsymbol{a})$$
$$\operatorname{grad} f = \left(\tfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \tfrac{\partial f}{\partial x_n}\right) = \left(\tfrac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \tfrac{\partial}{\partial x_n}\right) f$$
$$\operatorname{grad} = \left(\tfrac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \tfrac{\partial}{\partial x_n}\right) = \nabla \quad (\textit{nabla})$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) = \lim_{t\to 0} \frac{\varphi(a_i + t) - \varphi(a_i)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{e}_i) - f(\boldsymbol{a})}{t}$$

Definice. *Derivace funkce* f *ve směru* $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n$ v bodě $\boldsymbol{a} \in D(f)$:

$$f'_{\boldsymbol{h}}(\boldsymbol{a}) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{a})}{t}.$$

Příklad. $f(x,y) = \mathrm{e}^x + x^2 y$, $\boldsymbol{a} = (1,2)$, $\boldsymbol{h} = (-1,3)$
$f'_{(-1,3)}(1,2) = \lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{t}(\mathrm{e}^{1-t} - \mathrm{e}) - 1 - 4t + 3t^2\right) = -\mathrm{e} - 1$

Poznámky.
1) Parciální derivace je směrová: $\frac{\partial f}{\partial x_i} = f'_{\boldsymbol{e}_i}$.
2) Někdy se uvažují jen jednotkové vektory $\boldsymbol{h}$: $\|\boldsymbol{h}\| = 1$.
3) $f'_{\boldsymbol{o}}(\boldsymbol{a}) = 0$.
4) $f'_{c\boldsymbol{h}}(\boldsymbol{a}) = c \cdot f'_{\boldsymbol{h}}(\boldsymbol{a})$.
5) $\varphi(t) = f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{h})$: $f'_{\boldsymbol{h}}(\boldsymbol{a}) = \lim_{t\to 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \varphi'(0)$.

Věta. *Nechť* $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n$ *a existují* $f'_{\boldsymbol{h}}(\boldsymbol{a}), g'_{\boldsymbol{h}}(\boldsymbol{a})$. *Pak*

1) $(f+g)'_{\boldsymbol{h}}(\boldsymbol{a}) = f'_{\boldsymbol{h}}(\boldsymbol{a}) + g'_{\boldsymbol{h}}(\boldsymbol{a})$,
2) $(f \cdot g)'_{\boldsymbol{h}}(\boldsymbol{a}) = f'_{\boldsymbol{h}}(\boldsymbol{a}) \cdot g(\boldsymbol{a}) + f(\boldsymbol{a}) \cdot g'_{\boldsymbol{h}}(\boldsymbol{a})$,
3) $\left(\frac{f}{g}\right)'_{\boldsymbol{h}}(\boldsymbol{a}) = \dfrac{f'_{\boldsymbol{h}}(\boldsymbol{a}) \cdot g(\boldsymbol{a}) - f(\boldsymbol{a}) \cdot g'_{\boldsymbol{h}}(\boldsymbol{a})}{g(\boldsymbol{a})^2}$ $(g(\boldsymbol{a}) \neq 0)$.

Důkaz. Přepisem do jedné proměnné.

Věta. *Nechť* $\boldsymbol{a}$ *je vnitřní bod* $D(f)$, *parciální derivace* f *existují v některém okolí* $\boldsymbol{a}$ *a jsou v tomto bodě spojité (tj.* $\operatorname{grad} f$ *je spojitý v* $\boldsymbol{a}$*). Pak*

$$f'_h(\boldsymbol{a}) = \operatorname{grad} f(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{h}.$$

Příklad. $f(x,y) = \mathrm{e}^x + x^2 y$, $\operatorname{grad} f(1,2) = (\mathrm{e}+4, 1)$
$f'_{(-1,3)}(1,2) = (\mathrm{e}+4, 1) \cdot (-1,3) = -\mathrm{e} - 1$

Příklad. Předpoklad o spojitosti nelze vypustit.
$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ pro $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$
$\operatorname{grad} f(0,0) = (0,0)$ $(f(x,0) = f(0,y) = 0)$
$f'_{(1,1)}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0{,}5 - 0}{t}$ neexistuje
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y(y^2 - x^2)}{(x^2+y^2)^2}$
$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=2x}} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{6}{25x}$ neexistuje

Věta (Lagrange). *Nechť* $I \subset D(f)$ *je úsečka s krajními body* $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$, f *je spojitá na* I *a má v každém bodě* $I \setminus \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$ *derivaci ve směru* $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$. *Pak existuje* $\alpha \in (0,1)$ *tak, že*

$$f(\boldsymbol{b}) - f(\boldsymbol{a}) = f'_{\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}}\big(\boldsymbol{a} + \alpha(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})\big).$$

Důkaz. $f\big(\boldsymbol{a} + t(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})\big) = \varphi(t)$, $t \in \langle 0, 1\rangle$
$f(\boldsymbol{a}) = \varphi(0)$, $f(\boldsymbol{b}) = \varphi(1)$, $f'_{\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}}\big(\boldsymbol{a} + t(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})\big) = \varphi'(t)$
Lagrange $n = 1$: $\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\alpha)\,(1 - 0) = \varphi'(\alpha)$

Poznámka. Bod $\boldsymbol{a} + \alpha(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})$ leží uvnitř úsečky I.

Příklad. $f(x,y) = 1$ na $\{(x,y)\colon\ y = x^2,\ x \neq 0\}$, jinak 0
$f'_{\boldsymbol{h}}(0,0) = 0$, f není spojitá v $(0,0)$

lineární aproximace přírůstku: $f(a+h) - f(a) = k \cdot h + \omega(h)$
$\frac{\omega(h)}{h} = \frac{f(a+h) - f(a) - kh}{h}$
$\lim_{h\to 0} \frac{\omega(h)}{h} = f'(a) - k \dots$ nejlepší pro $k = f'(a)$
nejlepší lineární aproximace $L(h) = f'(a)\,h$
$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - L(h)}{h} = 0$

Definice. (*Totální*) *diferenciál* funkce f v bodě $\boldsymbol{a}$ (vnitřní bod $D(f)$) je lineární zobrazení $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, pro které platí

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{o}} \frac{f(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{a}) - L(\boldsymbol{h})}{\|\boldsymbol{h}\|} = 0.$$

Pokud existuje, říkáme, že f je *diferencovatelná* v bodě $\boldsymbol{a}$.

Poznámky. 1) Značení: $\mathrm{d}f(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h})$, $\mathrm{d}f(\boldsymbol{a})[\boldsymbol{h}]$, $\mathrm{d}f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{h})$.
2) $\mathrm{d}f(\boldsymbol{a})$ je lineární zobrazení:

$$\mathrm{d}f(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h}) = k_1 h_1 + \dots + k_n h_n$$
$$\mathrm{d}f(\boldsymbol{a}) = k_1\,\mathrm{d}x_1 + \dots + k_n\,\mathrm{d}x_n = (k_1, \dots, k_n) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

Příklad. $f(x,y) = x^2 + y^2$, $\mathrm{d}f(1,1)(h_1, h_2) = 2h_1 + 2h_2$.

Poznámky. 1) Je-li f lineární, pak $\mathrm{d}f(\boldsymbol{a}) = f$.
2) $n = 1$: $\mathrm{d}f(a)(h) = f'(a)\,h$, $\mathrm{d}f(a)$ s $f'(a)$ ztotožňujeme.
3) Pro vektorovou funkci $F = (f_1, \dots, f_n)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ je $\mathrm{d}F = (\mathrm{d}f_1, \dots, \mathrm{d}f_n)$, tj.:

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{o}} \frac{\|F(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}) - F(\boldsymbol{a}) - \mathrm{d}F(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h})\|}{\|\boldsymbol{h}\|} = 0.$$

Věty o derivacích

Věta. *Má-li funkce f v bodě $\boldsymbol{a}$ totální diferenciál, pak má v $\boldsymbol{a}$ všechny směrové derivace a platí (pro každé $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n$)*

$$f'_{\boldsymbol{h}}(\boldsymbol{a}) = \mathrm{d}f(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h}) = \operatorname{grad} f(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{h}\,.$$

Důkaz. 1) $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{o}$: $f'_{\boldsymbol{o}}(\boldsymbol{a}) = 0 = \mathrm{d}f(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{o})$
$\boldsymbol{h} \neq \boldsymbol{o}$: $t \to 0 \iff t\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{o}$:

$$\begin{aligned} f'_{\boldsymbol{h}}(\boldsymbol{a}) - \mathrm{d}f(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h}) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{a}) - t\,\mathrm{d}f(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h})}{t} \\ &= \lim_{t\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{o}} \underbrace{\frac{f(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{a}) - \mathrm{d}f(\boldsymbol{a})(t\boldsymbol{h})}{\pm\|t\boldsymbol{h}\|}}_{\to 0} \cdot \|\boldsymbol{h}\| = 0 \end{aligned}$$

2) $(\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n)$ standardní ortonormální báze $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h}) &= \mathrm{d}f(\boldsymbol{a})(h_1\boldsymbol{e}_1 + \dots + h_n\boldsymbol{e}_n) \\ &= h_1\,\mathrm{d}f(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{e}_1) + \dots + h_n\,\mathrm{d}f(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{e}_n) \\ &\overset{1)}{=} h_1\,f'_{\boldsymbol{e}_1}(\boldsymbol{a}) + \dots + h_n\,f'_{\boldsymbol{e}_n}(\boldsymbol{a}) \\ &= h_1\,\tfrac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) + \dots + h_n\,\tfrac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) \\ &= \operatorname{grad} f(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{h} \end{aligned}$$

Poznámka. Stručné zápisy:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f(\boldsymbol{a}) &= \operatorname{grad} f(\boldsymbol{a}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x} \\ \mathrm{d}f &= \mathrm{d}\boldsymbol{x} \cdot \operatorname{grad} f \\ \mathrm{d} &= \mathrm{d}\boldsymbol{x} \cdot \operatorname{grad} \end{aligned}$$

Věta. *Má-li funkce v některém bodě diferenciál, pak je v tomto bodě spojitá.*

Důkaz. $\|\mathrm{d}f(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h})\| = \|\operatorname{grad} f(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{h}\| \le \|\operatorname{grad} f(\boldsymbol{a})\| \cdot \|\boldsymbol{h}\|$:
$\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{o}}[f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{a})] =$
$= \lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{o}} \Big[\underbrace{\tfrac{f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{a}) - \mathrm{d}f(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h})}{\|\boldsymbol{h}\|}}_{\to 0} \cdot \|\boldsymbol{h}\| + \underbrace{\mathrm{d}f(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h})}_{\to 0}\Big] = 0.$

Věta. *Má-li funkce v některém vnitřním bodě svého definičního oboru spojité parciální derivace (tj. spojitý gradient), pak má v tomto bodě diferenciál.*

Důkaz. Ověříme, že $\operatorname{grad} f(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{h}$ je diferenciál:

$f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{a}) - \operatorname{grad} f(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{h} =$
$= [f(a_1+h_1, a_2+h_2, \dots) - f(a_1, a_2+h_2, \dots, a_n+h_n)] +$
$+ [f(a_1, a_2+h_2, \dots, a_n+h_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_n+h_n)] + \cdots$
$+ [f(a_1, a_2, \dots, a_n+h_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_n)] - \operatorname{grad} f(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{h}$
$= \frac{\partial f}{\partial x_1}\big(\boldsymbol{x}_1(\boldsymbol{h})\big)\,h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\big(\boldsymbol{x}_n(\boldsymbol{h})\big)\,h_n -$
$- \frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a})\,h_1 - \dots - \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{a})\,h_n$
$= \|\boldsymbol{h}\| \sum_{i=1}^n \underbrace{\Big[\tfrac{\partial f}{\partial x_i}\big(\boldsymbol{x}_i(\boldsymbol{h})\big) - \tfrac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a})\Big]}_{\to 0} \cdot \underbrace{\tfrac{h_i}{\|\boldsymbol{h}\|}}_{\in\langle -1,1\rangle}$

Důsledek. *Jsou-li parciální derivace spojité na otevřené množině, pak diferenciál existuje v každém bodě této množiny.*

Poznámka. Je-li $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ lineární, pak existuje matice $\boldsymbol{A}$ typu (k,n) tak, že

$$A(\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\,.$$

Diferenciál $\mathrm{d}f(\boldsymbol{a})$ má za matici $\operatorname{grad} f(\boldsymbol{a})$.

$$\mathrm{d}f(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h})^{(\mathrm{T})} = \left(\tfrac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) \ \dots\ \tfrac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{a})\right) \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}.$$

Pro vektorovou funkci $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, $F = (f_1, \dots, f_k)$ máme diferenciály po souřadnicích:

$$\mathrm{d}F(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h}) = \big(\mathrm{d}f_1(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h}), \cdots, \mathrm{d}f_k(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h})\big)$$

$$\mathrm{d}F(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h})^{\mathrm{T}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) \end{pmatrix}}_{\textit{Jacobiho matice } F \text{ v } \boldsymbol{a}} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$$

Příklad. $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(x,y) = (x^2 + xy, 2x + 5y)$

$$\mathrm{d}F(x,y) \sim \begin{pmatrix} 2x+y & x \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{d}F(1,1)(h_1,h_2)^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3h_1 + h_2 \\ 2h_1 + 5h_2 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{d}F(1,1)(h_1,h_2) = (3h_1 + h_2, 2h_1 + 5h_2)$$

Poznámky.
1) Parciální derivace v okolí, spojité v bodě $\Rightarrow$ diferenciál v bodě $\Rightarrow$ všechny směrové derivace v bodě.
2) Podmínka spojitosti parciálních derivací není nutná.

Příklad. $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}$ pro $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$
diferenciál $\mathrm{d}f(0,0)(h_1,h_2) = 0$ existuje
limita $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\sin\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}$ neexistuje

Věta. *Funkce, která má v oblasti nulové všechny parciální derivace, je v této oblasti konstantní.*

Důkaz. Zvolme $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in G$, existuje čára $L \subset G$ z $\boldsymbol{x}$ do $\boldsymbol{y}$ složená z úseček, BÚNO z jedné, existuje $\boldsymbol{z} \in L$:
$f(\boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{x}) = f'_{\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{z}) = \operatorname{grad} f(\boldsymbol{z}) \cdot (\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{o} \cdot (\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}) = 0.$

Důsledek. *Funkce se stejnými parciálními derivacemi v oblasti se v této oblasti liší o konstantu.*

Příklad. $f(x,y) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y$
$g(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$, $xy \neq 1$
$\operatorname{grad} f(x,y) = \left(\frac{1}{1+x^2}, \frac{1}{1+y^2}\right) = \operatorname{grad} g(x,y)$
$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$ pro $xy < 1$
$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy} + \pi$ pro $xy > 1$, $x > 0$
$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy} - \pi$ pro $xy > 1$, $x < 0$

Interpretace a aplikace

Směr největšího spádu

pro $\|\boldsymbol{h}\| = 1$ je
$f'_{\boldsymbol{h}}(\boldsymbol{a}) = \operatorname{grad} f(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{h} = \|\operatorname{grad} f(\boldsymbol{a})\| \cdot \cos \sphericalangle(\operatorname{grad} f(\boldsymbol{a}), \boldsymbol{h})$
pokud $\operatorname{grad} f(\boldsymbol{a}) \neq 0$, je největší a nejmenší hodnota pro

$$\boldsymbol{h}_{\max} = \frac{\operatorname{grad} f(\boldsymbol{a})}{\|\operatorname{grad} f(\boldsymbol{a})\|}, \qquad \boldsymbol{h}_{\min} = -\boldsymbol{h}_{\max}.$$

Tečná nadrovina a normála grafu

tečná nadrovina (lineární aproximace) v $[\boldsymbol{a}, f(\boldsymbol{a})]$:
$y = f(\boldsymbol{a}) + \operatorname{grad} f(\boldsymbol{a}) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})$
$\operatorname{grad} f(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{x} - y = \operatorname{grad} f(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{a} - f(\boldsymbol{a})$
$\big(\operatorname{grad} f(\boldsymbol{a}), -1\big) \cdot (\boldsymbol{x}, y) = \big(\operatorname{grad} f(\boldsymbol{a}), -1\big) \cdot \big(\boldsymbol{a}, f(\boldsymbol{a})\big)$
$\big(\operatorname{grad} f(\boldsymbol{a}), -1\big)$ je normálový vektor

Lineární aproximace

$f(\boldsymbol{x}) \approx f(\boldsymbol{a}) + \mathrm{d}f(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) = f(\boldsymbol{a}) + \operatorname{grad} f(\boldsymbol{a}) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})$

Příklad. Aproximujte $f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}$ v okolí $(0, 0)$.
$\operatorname{grad} f(x, y) = \big(\frac{1}{1+x^2}, \frac{1}{1+y^2}\big)$, $\operatorname{grad} f(0, 0) = (1, 1)$
$f(x, y) \approx f(0, 0) + (1, 1) \cdot (x, y) = x + y$

Věta. *Je-li $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\, \partial x_i}$ spojitá na otevřené množině G, pak na G platí*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\, \partial x_i}.$$

Věta. *Existují-li $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\, \partial x_i}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}$ v okolí bodu $\boldsymbol{a}$ a jsou-li spojité v $\boldsymbol{a}$, pak jsou v tomto bodě stejné.*

Příklad. $f(x, y) = \mathrm{e}^{xy^2}$
$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y^2 \mathrm{e}^{xy^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x\mathrm{e}^{xy^2}$
$\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(x, y) = 2y\mathrm{e}^{xy^2} + 2xy^3\mathrm{e}^{xy^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(x, y)$

Definice. Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $k \in \mathbb{N}$. Funkce $f : G \to \mathbb{R}^n$ se nazývá *třídy* C^k na G ($f \in C^k(G)$), jestliže všechny parciální derivace řádu k jsou na G spojité.

Poznámky.
1) C^0 … spojité funkce
2) $C^0 \supset C^1 \supset C^2 \supset \cdots$
3) $\bigcap_{k=1}^{\infty} C^k = C^{\infty}$

Důsledek. *Je-li $f \in C^k(G)$, pak parciální derivace do řádu k na G nezávisejí na pořadí derivování.*

Derivace vyšších řádů

Parciální derivace vyšších řádů:

$$\boldsymbol{x} \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})$$

$$\boldsymbol{x} \mapsto \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial x_i}}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\, \partial x_i}(\boldsymbol{x})$$

$\frac{\partial^3 f}{\partial x\, \partial x\, \partial y}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2\, \partial y}(\boldsymbol{x})$
$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \dots \partial x_{i_1}}(\boldsymbol{x})$ … *řádu* k
smíšená: alespoň 2 proměnné různé

Poznámka. Pořadí derivování nelze vždy zaměnit.

Příklad.

$$f(x, y) = \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} \quad \text{pro } (x, y) \neq (0, 0),\ f(0, 0) = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2} \quad \text{pro } (x, y) \neq (0, 0)$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x(x^4 - 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2} \quad \text{pro } (x, y) \neq (0, 0)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(0, 0) = \lim_{y \to 0} \frac{1}{y}\Big(\frac{\partial f}{\partial y}(0, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)\Big) = -1$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(0, 0) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x}\Big(\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)\Big) = 1$$

$$\mathrm{d}f(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h}) = \operatorname{grad} f(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{h} = (\boldsymbol{h} \cdot \operatorname{grad}) f(\boldsymbol{a})$$
$$\mathrm{d} \to \boldsymbol{h} \cdot \operatorname{grad} = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$
$$\mathrm{d}^2 \to (\boldsymbol{h} \cdot \operatorname{grad})^2 = \sum_{i,j=1}^n h_i h_j \frac{\partial^2}{\partial x_i\, \partial x_j}$$
$$\mathrm{d}^3 \to (\boldsymbol{h} \cdot \operatorname{grad})^3 = \sum_{i,j,k=1}^n h_i h_j h_k \frac{\partial^3}{\partial x_i\, \partial x_j\, \partial x_k}$$
$$\dots$$

Poznámky.
1) Pro $n = 1$ je $\mathrm{d}^k f(a)(h) = f^{(k)}(a)\, h^k$.
2) Pro $f(x, y)$ se spojitými parciálními derivacemi:

$$\mathrm{d}^2 \to h_1^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2h_1h_2 \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y} + h_2^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$
$$\mathrm{d}^3 \to h_1^2 \frac{\partial^3}{\partial x^3} + 3h_1^2h_2 \frac{\partial^3}{\partial x^2\, \partial y} + 3h_1h_2^2 \frac{\partial^3}{\partial x\, \partial y^2} + h_2^3 \frac{\partial^3}{\partial y^3}$$
$$\dots$$

3)

$$\mathrm{d}^2 \to (h_1, \dots, h_n) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial x_1\, \partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2}{\partial x_n\, \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}}_{\text{Hessova matice}} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$$

Příklad. Pro $f(x, y) = x^y = \mathrm{e}^{y \ln x}$, $D(f) = (0, \infty) \times \mathbb{R}$ je $\mathrm{d}^2 f(1, 2)(h_1, h_2) = 2h_1^2 + 2h_1h_2$.

Taylorův polynom

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)\,h+\frac{f''(a)}{2!}\,h^2+\cdots+\frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,h^k+ \\ +\frac{f^{(k+1)}(a+\alpha h)}{(k+1)!}\,h^{k+1}$$

Věta (o Taylorově polynomu). *Je-li funkce f třídy C^{k+1} na otevřené množině $G\subset\mathbb{R}^n$ obsahující úsečku s krajními body $\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}$, pak existuje $\alpha\in(0,1)$ tak, že platí*

$$f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})=f(\boldsymbol{a})+\mathrm{d}f(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h})+\frac{\mathrm{d}^2f(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h})}{2!}+\cdots+ \\ +\frac{\mathrm{d}^kf(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h})}{k!}+\frac{\mathrm{d}^{k+1}f(\boldsymbol{a}+\alpha\boldsymbol{h})(\boldsymbol{h})}{(k+1)!}\,.$$

Poznámky.
1) $\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}$ (*Taylorův polynom*).
2) Pro $k=0$ dostáváme Lagrangeovu větu:
$f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})=f(\boldsymbol{a})+\boldsymbol{h}\cdot\operatorname{grad}f(\boldsymbol{a}+\alpha\boldsymbol{h})=f'_{\boldsymbol{h}}(\boldsymbol{a}+\alpha\boldsymbol{h})$.

Příklad. Pomocí Taylorova polynomu odhadněte $1{,}05^{3{,}02}$.
$f(x,y)=x^y$, $\boldsymbol{a}=(1,3)$, $\boldsymbol{h}=(0{,}05;0{,}02)$,
$(\boldsymbol{h}\cdot\operatorname{grad})f=h_1\frac{\partial f}{\partial x}+h_2\frac{\partial f}{\partial y}=h_1yx^{y-1}+h_2x^y\ln x=3h_1$,
$(\boldsymbol{h}\cdot\operatorname{grad})^2f=h_1^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2h_1h_2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}+h_2^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=$
$=h_1^2y(y-1)x^{y-2}+2h_1h_2x^{y-1}(1+y\ln x)+h_2^2x^y\ln^2 x=$
$=6h_1^2+2h_1h_2$,
$f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})\approx f(\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{h}\cdot\operatorname{grad})f(\boldsymbol{a})+\frac{1}{2}(\boldsymbol{h}\cdot\operatorname{grad})^2f(\boldsymbol{a})=$
$=1+3h_1+3h_1^2+h_1h_2=1{,}1585$ ($1{,}05^{3{,}02}=1{,}1587\ldots$)

Příklad. Určete diferenciál $f(x,y)=g(\mathrm{e}^{xy},\mathrm{e}^{-xy})$, $g\in C^1$.
Pro $(\mathrm{e}^{xy},e^{-xy})=(u,v)=\big(f_1(x,y),f_2(x,y)\big)=F(x,y)$ je $f=g\circ F$

$$\mathrm{d}g(x,y)\sim\left(\tfrac{\partial g}{\partial u},\tfrac{\partial g}{\partial v}\right)$$
$$\mathrm{d}F(x,y)\sim\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x}&\frac{\partial f_1}{\partial y}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x}&\frac{\partial f_2}{\partial y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y\,\mathrm{e}^{xy}&x\,\mathrm{e}^{xy}\\ -y\,\mathrm{e}^{-xy}&-x\,\mathrm{e}^{-xy}\end{pmatrix}$$
$$\mathrm{d}f(x,y)\sim\left(y\,\mathrm{e}^{xy}\tfrac{\partial g}{\partial u}-y\,\mathrm{e}^{-xy}\tfrac{\partial g}{\partial v},x\,\mathrm{e}^{xy}\tfrac{\partial g}{\partial u}-x\,\mathrm{e}^{-xy}\tfrac{\partial g}{\partial v}\right)$$

Věta. *Nechť $G\subset\mathbb{R}^n$, $H\subset\mathbb{R}^k$ jsou otevřené množiny, $F\colon G\to H$ má v bodě $\boldsymbol{a}\in G$ derivaci ve směru $\boldsymbol{h}\in\mathbb{R}^n$, $g\colon H\to\mathbb{R}$ má v bodě $\boldsymbol{b}=F(\boldsymbol{a})$ diferenciál. Pak funkce $(g\circ F)$ má v bodě $\boldsymbol{a}$ derivaci ve směru $\boldsymbol{h}$ a platí*

$$(g\circ F)'_{\boldsymbol{h}}(\boldsymbol{a})=\mathrm{d}g(\boldsymbol{b})\big(F'_{\boldsymbol{h}}(\boldsymbol{a})\big)\,.$$

Důkaz (pokud F má diferenciál).

$$(g\circ F)'_{\boldsymbol{h}}(\boldsymbol{a})=\mathrm{d}(g\circ F)(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h})=\big(\mathrm{d}g(\boldsymbol{b})\circ\mathrm{d}F(\boldsymbol{a})\big)(\boldsymbol{b}) \\ =\mathrm{d}g(\boldsymbol{b})\big(\mathrm{d}F(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h})\big)=\mathrm{d}g(\boldsymbol{b})\big(F'_{\boldsymbol{h}}(\boldsymbol{a})\big)$$

Derivace složené funkce

$n=1$: $\mathbb{R}\xrightarrow{f}\mathbb{R}\xrightarrow{g}\mathbb{R}$, $(g\circ f)'(a)=g'\big(f(a)\big)\cdot f'(a)$

Věta. *Nechť $G\subset\mathbb{R}^n$, $H\subset\mathbb{R}^k$ jsou otevřené množiny, $F\colon G\to H$ má diferenciál v bodě $\boldsymbol{a}\in G$, $g\colon H\to\mathbb{R}$ má diferenciál v bodě $\boldsymbol{b}=F(\boldsymbol{a})$. Pak funkce $(g\circ F)$ má v bodě $\boldsymbol{a}$ diferenciál a platí*

$$\mathrm{d}(g\circ F)(\boldsymbol{a})=\mathrm{d}g(\boldsymbol{b})\circ\mathrm{d}F(\boldsymbol{a})\,.$$

Poznámky.
1) Složení lineárních zobrazení je lineární.
2) Matice složeného zobrazení je součinem matic ($F=(f_1,\ldots,f_k)$):

$$\mathrm{d}g(\boldsymbol{b})\sim\operatorname{grad}g(\boldsymbol{b})$$
$$\mathrm{d}F(\boldsymbol{a})\sim\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{a})&\cdots&\frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\boldsymbol{a})\\ \vdots&&\vdots\\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1}(\boldsymbol{a})&\cdots&\frac{\partial f_k}{\partial x_n}(\boldsymbol{a})\end{pmatrix}$$
$$\mathrm{d}(g\circ F)(\boldsymbol{a})\sim\operatorname{grad}g(\boldsymbol{b})\cdot\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{a})&\cdots&\frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\boldsymbol{a})\\ \vdots&&\vdots\\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1}(\boldsymbol{a})&\cdots&\frac{\partial f_k}{\partial x_n}(\boldsymbol{a})\end{pmatrix} \\ =\left(\operatorname{grad}g(\boldsymbol{b})\,\tfrac{\partial F}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}),\ldots,\operatorname{grad}g(\boldsymbol{b})\,\tfrac{\partial F}{\partial x_n}(\boldsymbol{a})\right).$$

3) Lze i pro vektorovou funkci g.
4) Pro $n=k=1$ dostaneme násobení čísel (derivací).

Pro parciální derivace dostáváme tzv. *řetězové pravidlo* (značíme $F(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{y}$, $g(y_1,\ldots,y_k)$):

$$\tfrac{\partial(g\circ F)}{\partial x_i}(\boldsymbol{a})=\operatorname{grad}g(\boldsymbol{b})\cdot\tfrac{\partial F}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) \\ =\left(\tfrac{\partial g}{\partial y_1}(\boldsymbol{b}),\ldots,\tfrac{\partial g}{\partial y_k}(\boldsymbol{b})\right)\cdot\left(\tfrac{\partial f_1}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}),\ldots,\tfrac{\partial f_k}{\partial x_i}(\boldsymbol{a})\right) \\ =\tfrac{\partial g}{\partial y_1}(\boldsymbol{b})\,\tfrac{\partial f_1}{\partial x_i}(\boldsymbol{a})+\cdots+\tfrac{\partial g}{\partial y_k}(\boldsymbol{b})\,\tfrac{\partial f_k}{\partial x_i}(\boldsymbol{a})\,.$$

Někdy vypustíme argumenty (uvažujeme $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$)

$$\frac{\partial(g\circ F)}{\partial x_i}=\frac{\partial g}{\partial y_1}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x_i}+\cdots+\frac{\partial g}{\partial y_k}\cdot\frac{\partial f_k}{\partial x_i}\,.$$

Někdy se nerozlišuje f_i od y_i ($f=g\circ F$):

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}=\frac{\partial g}{\partial y_1}\cdot\frac{\partial y_1}{\partial x_i}+\cdots+\frac{\partial g}{\partial y_k}\cdot\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\,.$$

(Někdy se nerozlišuje ani g od f.)

Příklad. Určete parciální derivace $f(x,y)=g(\mathrm{e}^{xy},e^{-xy})$.
Označme $(\mathrm{e}^{xy},e^{-xy})=(u,v)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial g}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=y\,\mathrm{e}^{xy}\frac{\partial g}{\partial u}-y\,\mathrm{e}^{-xy}\frac{\partial g}{\partial v}\,,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial g}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial g}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=x\,\mathrm{e}^{xy}\frac{\partial g}{\partial u}-x\,\mathrm{e}^{-xy}\frac{\partial g}{\partial v}\,.$$

Příklad. Pro $f(x,y,z)=x\,g(\frac{y}{x},\frac{z}{x})$, $g\in C^1$ je
$x\,\frac{\partial f}{\partial x}+y\,\frac{\partial f}{\partial y}+z\,\frac{\partial f}{\partial z}=f$.

Transformace diferenciálních výrazů

$f(x,y) \to g(u,v)$: $x, y, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \ldots \to u, v, \frac{\partial g}{\partial u}, \frac{\partial g}{\partial v}, \ldots$, $f \in C^k$

I. Nové proměnné pomocí starých

$$\boxed{f(x,y)\,, \qquad u = u(x,y)\,, \quad v = v(x,y)}$$

Použijeme větu o derivaci složené funkce pro $f(x,y) = g\big(u(x,y), v(x,y)\big)$, spočteme staré proměnné:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial g}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial g}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \\ x &= x(u,v) \\ y &= y(u,v) \end{aligned}$$

Příklad. $x\,\frac{\partial f}{\partial x} - y\,\frac{\partial f}{\partial y}$, $u = \frac{x}{y}$, $v = y$:

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial f}{\partial x} &= \tfrac{\partial g}{\partial u} \cdot \tfrac{1}{y} + \tfrac{\partial g}{\partial v} \cdot 0 \\ \tfrac{\partial f}{\partial y} &= \tfrac{\partial g}{\partial u} \cdot \tfrac{-x}{y^2} + \tfrac{\partial g}{\partial v} \cdot 1 \end{aligned}$$

$x = uv$, $y = v$:

$$x\,\tfrac{\partial f}{\partial x} - y\,\tfrac{\partial f}{\partial y} = \tfrac{2x}{y} \cdot \tfrac{\partial g}{\partial u} - y\,\tfrac{\partial g}{\partial v} = 2u\,\tfrac{\partial g}{\partial u} - v\,\tfrac{\partial g}{\partial v}$$

II. Staré proměnné pomocí nových

$$\boxed{f(x,y)\,, \qquad x = x(u,v)\,, \quad y = y(u,v)}$$

1. Přepočítáme $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ a použijeme I.

Příklad. $x\,\frac{\partial f}{\partial x} - y\,\frac{\partial f}{\partial y}$, $x = uv$, $y = v$: $u = \frac{x}{y}$, $v = y$

2. Použijeme větu o derivaci složené funkce pro $g(u,v) = f\big(x(u,v), y(u,v)\big)$, spočítáme parciální derivace f:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} & \qquad \frac{\partial f}{\partial x} &= \cdots \\ \frac{\partial g}{\partial v} &= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} & \qquad \frac{\partial f}{\partial y} &= \cdots \end{aligned}$$

Příklad. $x\,\frac{\partial f}{\partial x} - y\,\frac{\partial f}{\partial y}$, $x = uv$, $y = v$:

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial g}{\partial u} &= \tfrac{\partial f}{\partial x} \cdot v + \tfrac{\partial f}{\partial y} \cdot 0 & \qquad \tfrac{\partial f}{\partial x} &= \tfrac{1}{v} \cdot \tfrac{\partial g}{\partial u} \\ \tfrac{\partial g}{\partial v} &= \tfrac{\partial f}{\partial x} \cdot u + \tfrac{\partial f}{\partial y} \cdot 1 & \qquad \tfrac{\partial f}{\partial y} &= \tfrac{\partial g}{\partial v} - \tfrac{u}{v} \cdot \tfrac{\partial g}{\partial u} \end{aligned}$$

3. Použijeme větu o derivaci složené funkce pro f, parciální derivace nových proměnných podle starých spočítáme z derivací transformačních rovnic.

Příklad. $x\,\frac{\partial f}{\partial x} - y\,\frac{\partial f}{\partial y}$, $x = uv$, $y = v$
derivacemi transformačních rovnic dostaneme:

$$\begin{aligned} 1 &= \tfrac{\partial u}{\partial x} \cdot v + u \cdot \tfrac{\partial v}{\partial x} & \qquad 0 &= \tfrac{\partial u}{\partial y} \cdot v + u \cdot \tfrac{\partial v}{\partial y} \\ 0 &= \tfrac{\partial v}{\partial x} & \qquad 1 &= \tfrac{\partial v}{\partial y} \\ \tfrac{\partial u}{\partial x} &= \tfrac{1}{v}\,, \quad \tfrac{\partial v}{\partial x} = 0 & \qquad \tfrac{\partial u}{\partial y} &= -\tfrac{u}{v}\,, \quad \tfrac{\partial v}{\partial y} = 1 \end{aligned}$$

Věta. *Jacobiho matice inverzních vektorových funkcí jsou k sobě inverzní. (Pro regulární, tj. s nenulovým determinantem Jacobiho matice.)*

$$\begin{aligned} \left(\tfrac{\partial f}{\partial x}, \tfrac{\partial f}{\partial y}\right) &= \left(\tfrac{\partial g}{\partial u}, \tfrac{\partial g}{\partial v}\right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \\ \left(\tfrac{\partial g}{\partial u}, \tfrac{\partial g}{\partial v}\right) &= \left(\tfrac{\partial f}{\partial x}, \tfrac{\partial f}{\partial y}\right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Poznámka. Je to zobecnění věty o derivaci inverzní funkce jedné proměnné.

4. Použijeme větu o derivaci složené funkce pro f, parciální derivace nových proměnných podle starých spočítáme invertováním Jacobiho matice inverzní transformace.

Příklad. $x\,\frac{\partial f}{\partial x} - y\,\frac{\partial f}{\partial y}$, $x = uv$, $y = v$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} v & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{v} & 0 \\ -\frac{u}{v} & 1 \end{pmatrix}$$

Příklad. $\sqrt{1-x^2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0$, $x = \sin u$, $y = v$, $f \in C^2$:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\cos u} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial f}{\partial y} &= \tfrac{\partial g}{\partial v} \\ \tfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} &= \tfrac{\partial}{\partial x}\big(\tfrac{\partial f}{\partial y}\big) = \tfrac{\partial}{\partial x}\big(\tfrac{\partial g}{\partial v}\big) \\ &= \tfrac{\partial}{\partial u}\big(\tfrac{\partial g}{\partial v}\big) \cdot \tfrac{\partial u}{\partial x} + \tfrac{\partial}{\partial v}\big(\tfrac{\partial g}{\partial v}\big) \cdot \tfrac{\partial v}{\partial x} = \tfrac{\partial^2 g}{\partial u\,\partial v} \cdot \tfrac{1}{\cos x} \\ \tfrac{\partial^2 g}{\partial u\,\partial v} + \tfrac{\partial g}{\partial v} &= 0 \\ \tfrac{\partial}{\partial v}\big(\tfrac{\partial g}{\partial u} + g\big) &= 0 \\ \tfrac{\partial g}{\partial u} + g &= \varphi(u) \\ g(u,v) &= c_1(v)\,\mathrm{e}^{-u} + c_2(u) \\ f(x,y) &= c_1(y)\,\mathrm{e}^{\arcsin x} + \bar{c}_2(x) \end{aligned}$$

Příklad. $\triangle f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $f \in C^2$:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\frac{\sin\varphi}{r} & \frac{\cos\varphi}{r} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial f}{\partial x} &= \tfrac{\partial g}{\partial r} \cdot \cos\varphi - \tfrac{\partial g}{\partial \varphi} \cdot \tfrac{\sin\varphi}{r} \\ \tfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \tfrac{\partial}{\partial x}\big(\tfrac{\partial f}{\partial x}\big) = \tfrac{\partial}{\partial r}\big(\tfrac{\partial f}{\partial x}\big) \cdot \tfrac{\partial r}{\partial x} + \tfrac{\partial}{\partial \varphi}\big(\tfrac{\partial f}{\partial x}\big) \cdot \tfrac{\partial \varphi}{\partial x} \\ &= \big(\tfrac{\partial^2 g}{\partial r^2} \cos\varphi - \tfrac{\partial^2 g}{\partial \varphi\,\partial r}\,\tfrac{\sin\varphi}{r} + \tfrac{\partial g}{\partial \varphi}\,\tfrac{\sin\varphi}{r^2}\big) \cos\varphi \\ &\quad - \big(\tfrac{\partial^2 g}{\partial \varphi\,\partial r} \cos\varphi - \tfrac{\partial g}{\partial r} \sin\varphi - \tfrac{\partial^2 g}{\partial \varphi^2}\,\tfrac{\sin\varphi}{r} - \tfrac{\partial g}{\partial \varphi}\,\tfrac{\cos\varphi}{r}\big) \cdot \tfrac{\sin\varphi}{r} \\ \triangle f &= \tfrac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \tfrac{1}{r^2}\,\tfrac{\partial^2 g}{\partial \varphi^2} + \tfrac{1}{r}\,\tfrac{\partial g}{\partial r} \end{aligned}$$

Lokální extrémy funkcí více proměnných

f má v $\boldsymbol{a}$

lokální minimum: $f(\boldsymbol{x}) \geq f(\boldsymbol{a})$ na některém $P(\boldsymbol{a})$

lokální maximum: $f(\boldsymbol{x}) \leq f(\boldsymbol{a})$ na některém $P(\boldsymbol{a})$

lokální extrém: lokální minimum nebo lokální maximum

ostrý lokální extrém (maximum, minimum): ostrá nerovnost

Příklady.

1) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ má v $(0,0)$ ostré lokální minimum.
2) $f(x,y) = x^2y^2$ má v $(0,0)$ lokální minimum (neostré).
3) $f(x,y) = xy$ nemá v $(0,0)$ lokální extrém.

Poznámka. Funkce f má v $\boldsymbol{a}$ (ostré) lokální minimum právě tehdy, když funkce $-f$ má v $\boldsymbol{a}$ (ostré) lokální maximum.

Věta. *Nechť f má v $\boldsymbol{a}$ lokální extrém, $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n$. Pak $f'_{\boldsymbol{h}}(\boldsymbol{a})$ je buď nulová nebo neexistuje.*

Důkaz. $\varphi(t) = f(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{h})$

f má v $\boldsymbol{a}$ lokální extrém ... φ má v 0 lokální extrém

$f'_{\boldsymbol{h}}(\boldsymbol{a})$ existuje ... $\varphi'(0) = f'_{\boldsymbol{h}}(\boldsymbol{a})$ existuje, je nulová

Definice. Bod $\boldsymbol{a}$ nazýváme *stacionárním bodem* funkce f, jestliže všechny parciální derivace f jsou v $\boldsymbol{a}$ nulové.

druhý diferenciál: $\mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h}) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}(\boldsymbol{a})\, h_i h_j$

Příklady. $\mathrm{d}^2 f(0,0)$ je nulový:

1) $f(x,y) = x^2y^2$ má v $(0,0)$ (neostré) lokální minimum.
2) $f(x,y) = x^3+y^3$ nemá v $(0,0)$ lokální extrém.
2) $f(x,y) = x^4+y^4$ má v $(0,0)$ ostré lokální minimum.

Příklad. Určete lokální extrémy $f(x,y) = 3x^2-6xy-2y^3$.

$f \in C^2(\mathbb{R}^2)$, lokální extrémy jsou ve stacionárních bodech

$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x-6y = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -6x-6y^2 = 0$

stacionární body: $(0,0)$, $(-1,-1)$

$\mathrm{d}^2 f(x,y)(h_1,h_2) = 6h_1^2 - 12h_1h_2 - 12yh_2^2$

$\mathrm{d}^2 f(0,0)(h_1,h_2) = 6h_1^2 - 12h_1h_2 = 6[(h_1-h_2)^2 - h_2^2]$ je indefinitní

$\mathrm{d}^2 f(-1,-1)(h_1,h_2) = 6h_1^2 - 12h_1h_2 + 12h_2^2 = 6[(h_1-h_2)^2 + h_2^2]$ je pozitivně definitní

Funkce f má ostré lokální minimum $f(-1,-1) = -1$.

Hessova matice funkce f v bodě a:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\boldsymbol{a}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_n}(\boldsymbol{a}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\,\partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\boldsymbol{a}) \end{pmatrix}$$

Označme

$$D_k = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\boldsymbol{a}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_k}(\boldsymbol{a}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_k\,\partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}(\boldsymbol{a}) \end{pmatrix}$$

Definice. Řekneme, že $\mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{a})$ je

pozitivně definitní, pokud $\mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h}) > 0$ pro každý $\boldsymbol{h} \neq 0$;

negativně definitní, pokud $\mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h}) < 0$ pro každý $\boldsymbol{h} \neq 0$;

indefinitní, pokud existují $\boldsymbol{h}, \boldsymbol{k}$ tak, že $\mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h}) < 0 < \mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{k})$.

Příklady. (v $\mathbb{R}^3$)

1) $h_1^2 + 2h_2^2 + 5h_3^2$ je pozitivně definitní
2) $-2h_1^2 - h_2^2 - 4h_3^2$ je negativně definitní
3) $h_1^2 + 2h_2^2 - h_3^2$ je indefinitní: $(1,1,0) \mapsto 3$, $(0,0,1) \mapsto -1$
4) $h_1^2 + h_2^2 \geq 0$ není nic z výše uvedeného: $(0,0,1) \mapsto 0$ (pozitivně semidefinitní)

Věta. *Nechť f je třídy C^2 na otevřené množině G, $\boldsymbol{a} \in G$ je stacionární bod f. Pak platí:*

(1) Je-li $\mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{a})$ pozitivně definitní, pak f má v $\boldsymbol{a}$ ostré lokální minimum.

(2) Je-li $\mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{a})$ negativně definitní, pak f má v $\boldsymbol{a}$ ostré lokální maximum.

(3) Je-li $\mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{a})$ indefinitní, pak f nemá v $\boldsymbol{a}$ lokální extrém.

Důkaz (náznak). Podle Taylorovy věty existuje $t \in (0,1)$:

$f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{a}) + \mathrm{d}f(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h}) + \frac{1}{2}\mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{h})(\boldsymbol{h}) =$

$= f(\boldsymbol{a}) + \frac{1}{2}\mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{h})(\boldsymbol{h})$

1) spojité 2. derivace ... spojitý 2. diferenciál ... pozitivně definitní v okolí $U(\boldsymbol{a})$ ... pro $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h} \in P(\boldsymbol{a})$ je $f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) > f(\boldsymbol{a})$
2) podobně
3) $\mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h}) < 0 < \mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{k})$, ve směru $\boldsymbol{h}$ je je ostré lokální maximum, ve směru $\boldsymbol{k}$ ostré lokální minimum ... není lokální extrém

Poznámka. V $\mathbb{R}$ je $\mathrm{d}^2 f(a)(h) = f''(a)\, h^2$, definitnost je určena znaménkem $f''(a)$.

Věta (Sylvestrovo kriterium)**.** *Nechť f je třídy C^2.*

1) $\mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{a})$ je pozitivně definitní právě když $D_k > 0$ pro všechna $k = 1, \dots, n$.

2) $\mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{a})$ je negativně definitní právě když $(-1)^k D_k > 0$ pro všechna $k = 1, \dots, n$.

3) Pokud $D_n \neq 0$ a pokud nenastala ani jedna z předešlých možností, pak je $\mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{a})$ indefinitní.

Příklad. $f(x,y) = 3x^2 - 6xy - 2y^3$ (viz výše).

Hessova matice:

$$\begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -6 & -12y \end{pmatrix}$$

ve stacionárních bodech

$$(0,0): \quad \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}, \qquad D_1 = 6\,, \qquad D_2 = -36$$

$$(-1,-1): \quad \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 12 \end{pmatrix}, \qquad D_1 = 6\,, \qquad D_2 = 36$$

Příklad. $f(x,y,z) = 2y - 2z - y^2 - \frac{1}{2}z^2 + 3xz - x^3$.
gradient $(3z - 3x^2, 2 - 2y, -2 - z + 3x)$
Hessova matice:

$$\begin{pmatrix} -6x & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ve stacionárních bodech

$$(1,1,1)\colon \begin{pmatrix} -6 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix},\ D_1 = -6,\ D_2 = 12,\ D_3 = 6$$

$$(2,1,4)\colon \begin{pmatrix} -12 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix},\ D_1 = -12,\ D_2 = 24,\ D_3 = -6$$

ostré lokální maximum $f(2,1,4) = 1$

Vázané extrémy

$f(\boldsymbol{x})$, $G \subset \mathbb{R}^n$, M: $g_1(\boldsymbol{x}) = 0, \ldots$ (vazby)

I. Snížení počtu proměnných

1. Vyjádření některých proměnných jako funkce jiných (řešení vazeb).

Příklad. $f(x,y) = y - x^2$, M: $2x - y = 0$
$y = 2x$
$g(x) = f(x, 2x) = 2x - x^2$
$g(1) = 1$ ostré lokální maximum
$f(1,2) = 1$ ostré lokální maximum vzhledem k M

2. Vyjádření některých proměnných jako funkce nových (parametrizace).

Příklad. $f(x,y) = x + y + 1$, M: $x^2 + 2x + y^2 = 0$
M: $(x+1)^2 + y^2 = 1$, kružnice: střed $(-1,0)$, poloměr 1
M: $x = -1 + \cos t$, $y = \sin t$, $t \in \langle 0, 2\pi)$
$g(t) = f(-1 + \cos t, \sin t) = \cos t + \sin t$
$g(-1 + \sqrt{2}/2) = \sqrt{2}$ ostré lokální maximum
$g(-1 + \sqrt{2}/2) = -\sqrt{2}$ ostré lokální minimum
$f(-1 + \sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2) = \sqrt{2}$ ostré lok. max. vzhledem k M
$f(-1 - \sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2) = -\sqrt{2}$ ostré lok. min. vzhledem k M

Poznámka. První postup je zvláštním případem druhého.

II. Lagrangeova metoda multiplikátorů

Předpoklady: $G \subset \mathbb{R}^n$ otevřená, $f \in C^1(G)$,
M: $g_1(\boldsymbol{x}) = 0, \ldots g_p(\boldsymbol{x}) = 0$, $p < n$, $g_1 \ldots g_p \in C^1(G)$,
$\operatorname{grad} g_1(\boldsymbol{x}), \ldots \operatorname{grad} g_p(\boldsymbol{x})$ jsou lineárně nezávislé na M:

$$\operatorname{hod} \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_p}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_p}{\partial x_n} \end{pmatrix} = p$$

($\operatorname{grad} g_i(\boldsymbol{x})$ je normálový vektor nadplochy dané rovnicí $g_i(\boldsymbol{x}) = 0$ v $\boldsymbol{x}$, tj. tyto nadplochy se protínají v útvaru dimenze $n - p$).

Princip: f „neroste“ po M, tj. $\operatorname{grad} f$ je kolmý k M, tj. $\operatorname{grad} f$ je lineární kombinací normál nadploch, tj. pro „stacionární“ bod $\boldsymbol{a}$ platí

$$\operatorname{grad} f(\boldsymbol{a}) = \lambda_1 \operatorname{grad} g_1(\boldsymbol{a}) + \cdots + \lambda_p \operatorname{grad} g_p(\boldsymbol{a})\,.$$

Postup: $F(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) - \lambda_1 g_1(\boldsymbol{x}) - \cdots - \lambda_p g_p(\boldsymbol{x})$

$$\begin{array}{cc} \frac{\partial F}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) = 0 & g_1(\boldsymbol{x}) = 0 \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}) = 0 & g_p(\boldsymbol{x}) = 0 \end{array}$$

$n + p$ rovnic pro $x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots \lambda_p$ dá stacionární body.
Místo $\mathrm{d}^2 f$ je účinnější vyšetřovat $\mathrm{d}^2 F$.

Příklad. $f(x,y) = x + y + 1$, M: $g(x,y) = x^2 + 2x + y^2 = 0$
$\operatorname{grad} g(x,y) = (2x + 1, 2y) = \boldsymbol{o}$ v $(-\frac{1}{2}, 0) \notin M$
$F(x,y) = x + y + 1 - \lambda(x^2 + 2x + y^2)$

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial F}{\partial x}: & 1 - \lambda(2x + 2) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y}: & 1 - \lambda \cdot 2y = 0 \\ & x^2 + 2x + y^2 = 0 \end{array}$$

$(x_1, y_1) = (-1 + \sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$, $\lambda_1 = \sqrt{2}/2$
$(x_2, y_2) = (-1 - \sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$, $\lambda_2 = -\sqrt{2}/2$
$\mathrm{d}^2 f(x_i, y_i)(\boldsymbol{h}) = 0$ extrémy neurčí
$\mathrm{d}^2 F(x,y)(\boldsymbol{h}) = -2\lambda h_1^2 - 2\lambda h_2^2$:
$f(x_1, y_1) = \sqrt{2}$ ostré lokální maximum vzhledem k M
$f(x_2, y_2) = -\sqrt{2}$ ostré lokální minimum vzhledem k M

Poznámka. Definitnost $\mathrm{d}^2 f$ ($\mathrm{d}^2 F$) stačí vyšetřovat na tečném prostoru, tj. pro vektory $\boldsymbol{h}$ splňující

$$\begin{array}{c} \boldsymbol{h} \cdot \operatorname{grad} g_1(\boldsymbol{a}) = 0\,, \\ \vdots \\ \boldsymbol{h} \cdot \operatorname{grad} g_p(\boldsymbol{a}) = 0\,, \end{array} \qquad \begin{pmatrix} \operatorname{grad} g_1(\boldsymbol{a}) \\ \vdots \\ \operatorname{grad} g_p(\boldsymbol{a}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_p \end{pmatrix} = 0$$

(rovnice jsou podle podmínky lineárně nezávislé).

Příklad. $f(x,y,z) = xyz$, M: $x+y-1=0$, $y+z=0$.

$$\operatorname{hod}\begin{pmatrix}\operatorname{grad} g_1(x,y,z)\\ \operatorname{grad} g_2(x,y,z)\end{pmatrix} = \operatorname{hod}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix} = 2 \neq 0 \quad \text{v } \mathbb{R}^3$$

$F(x,y,z) = xyz - \lambda(x+y-1) - \mu(y+z)$

$$\begin{aligned}
\tfrac{\partial F}{\partial x}: &\quad yz - \lambda = 0\\
\tfrac{\partial F}{\partial y}: &\quad xz - \lambda - \mu = 0\\
\tfrac{\partial F}{\partial z}: &\quad xy - \mu = 0\\
&\quad x+y-1 = 0\\
&\quad y+z = 0
\end{aligned}$$

$(x_1,y_1,z_1) = (1,0,0)$, $\lambda_1 = \mu_1 = 0$
$(x_2,y_2,z_2) = (\frac13, \frac23, -\frac23)$, $\lambda_2 = -\frac49$, $\mu_1 = \frac29$
$\mathrm{d}^2 f(x,y,z)(\boldsymbol{h}) = 2zh_1h_2 + 2yh_1h_3 + 2xh_2h_3$
1) $\mathrm{d}^2 f(1,0,0)(\boldsymbol{h}) = 2h_2h_3$ je indefinitní (není to l. e. v $\mathbb{R}^3$)

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\cdot \boldsymbol{h} = 0 \qquad \rightarrow \qquad h_2 = -h_1\,, \quad h_3 = h_1$$

$\mathrm{d}^2 f(1,0,0)(h_1,-h_1,h_1) = -2h_1^2$ je negativně definitní v h_1
$f(1,0,0) = 0$ je vázané ostré lokální maximum
2) $\mathrm{d}^2 f(\frac13, \frac23, -\frac23)(\boldsymbol{h}) = -\frac43 h_1h_2 + \frac43 h_1h_3 - \frac23 h_2h_3$
$\mathrm{d}^2 f(\frac13, \frac23, -\frac23)(h_1,-h_1,h_1) = 2h_1^2$ je pozitivně definitní v h_1
$f(\frac13, \frac23, -\frac23) = -\frac{4}{27}$ je vázané ostré lokální minimum

Maximum a minimum funkce

absolutní/globální extrémy

Věta. *Spojitá funkce na omezené uzavřené množině nabývá svého maxima i minima.*

Postup:
1) Lokální extrémy uvnitř.
2) Vázané extrémy na hranici.

Příklad. $f(x,y) = x^2+y^2-6x-4y+11$, M: $x^2+y^2-4x \le 5$
1) Lokální extrémy uvnitř:

$$\begin{aligned}
\tfrac{\partial f}{\partial x}: &\quad 2x-6 = 0\\
\tfrac{\partial f}{\partial y}: &\quad 2y-4 = 0
\end{aligned}$$

stacionární bod $(3,2) \in M$, $f(3,2) = -2$
2) Vázané extrémy na hranici:
$F(x,y) = x^2+y^2-6x-4y+11 - \lambda(x^2+y^2-4x-5)$

$$\begin{aligned}
\tfrac{\partial F}{\partial x}: &\quad 2x-6-\lambda(2x-4) = 0\\
\tfrac{\partial F}{\partial y}: &\quad 2y-4-\lambda(2y) = 0\\
&\quad x^2+y^2-4x-5 = 0
\end{aligned}$$

$f(2+3/\sqrt5, 6/\sqrt5) = 12 - 6\sqrt5 \doteq -1{,}4$
$f(2-3/\sqrt5, -6/\sqrt5) = 12 + 6\sqrt5 \doteq 25{,}4$
$\max_M f = f(2-3/\sqrt5, -6/\sqrt5) = 12+6\sqrt5$,
$\min_M f = f(3,2) = -2$

Funkce zadané implicitně

$F(x,y) = 0 \rightarrow y = f(x)$

Příklady.
1) $x^2+y^2-1=0$: kružnice, pro $x \in \langle -1, 1\rangle$ je:
$y_1(x) = \sqrt{1-x^2}$, $y_2(x) = -\sqrt{1-x^2}$
2) $x^2+y^2+1=0$: $\emptyset$
3) $(x-1)^2+(y+3)^2=0$: bod $(1,-3)$
4) $|xy| - xy = 0$: $\langle 0,\infty)^2 \cup (-\infty, 0\rangle^2$

Věta. *Nechť $F(x,y)$ je funkce třídy C^1 v okolí (a,b), $F(a,b) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(a,b) \neq 0$. Pak existuje okolí U bodu a a funkce $f \in C^1(U)$ tak, že $f(a) = b$, $F\big(x, f(x)\big) = 0$ na U a*

$$f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}\big(x,f(x)\big)}{\frac{\partial F}{\partial y}\big(x,f(x)\big)} \quad \text{na } U\,.$$

Poznámka. Je-li $\frac{\partial F}{\partial x}(a,b) \neq 0$, pak $x = g(y)$ v okolí b.

Důkaz (druhé části). Derivací $F\big(x,f(x)\big) = 0$ podle x dostaneme

$$\tfrac{\partial F}{\partial x}\big(x,f(x)\big) + \tfrac{\partial F}{\partial y}\big(x,f(x)\big)\cdot f'(x) = 0\,.$$

Poznámka. Derivace vyšších řádů (je-li F patřičné třídy C^k) dostaneme dalším derivováním, například:

$$\tfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \tfrac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} f' + \big(\tfrac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} + \tfrac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} f'\big) f' + \tfrac{\partial F}{\partial y} f'' = 0$$

Příklad. Určete lokální extrémy funkce $y(x)$ dané implicitně rovnicí $x^2+y^2=1$.
$F(x,y) = x^2+y^2-1 = 0$
$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 2y$ je nenulové pro $y \neq 0$.
derivací rovnice $x^2+y^2(x)-1=0$ podle x dostaneme

$$2x + 2y(x)\,y'(x) = 0\,, \qquad y'(x) = -\tfrac{x}{y(x)}$$

stacionární body $(0,1)$, $(0,-1)$
druhou derivací rovnice podle x dostaneme $(y'(x)=0)$

$$2 + 2y'^2(x) + 2y(x)\,y''(x) = 0\,, \qquad y''(x) = -\tfrac{1}{y(x)}$$

$(0,1)$: $y_1''(0) = -1/2 < 0$, ostré lokální maximum
$(0,-1)$: $y_2''(0) = 1/2 > 0$, ostré lokální minimum

Věta. *Nechť $F(\boldsymbol{x},y)$ je funkce třídy C^1 v okolí $(\boldsymbol{a},b)$, $F(\boldsymbol{a},b) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(\boldsymbol{a},b) \neq 0$. Pak existuje okolí U bodu $\boldsymbol{a}$ a funkce $f \in C^1(U)$ tak, že $f(\boldsymbol{a}) = b$, $F\big(\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x})\big) = 0$ na U a*

$$\operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}) = -\left(\frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}\big(\boldsymbol{x},f(\boldsymbol{x})\big)}{\frac{\partial F}{\partial y}\big(\boldsymbol{x},f(\boldsymbol{x})\big)}, \ldots, \frac{\frac{\partial F}{\partial x_n}\big(\boldsymbol{x},f(\boldsymbol{x})\big)}{\frac{\partial F}{\partial y}\big(\boldsymbol{x},f(\boldsymbol{x})\big)}\right) \quad \text{na } U\,.$$

Poznámka. $\operatorname{grad} F(\boldsymbol{x},y)$ je normálový vektor nadplochy dané rovnicí $F(\boldsymbol{x},y) = 0$, tj. grafu implicitně zadané funkce. Speciálně pro $z = f(x,y)$ a $F(x,y,z) = f(x,y) - z$ je

$$\operatorname{grad} F = \big(\tfrac{\partial f}{\partial x}, \tfrac{\partial f}{\partial y}, -1\big) = (\operatorname{grad} f, -1)$$

Věta. *Nechť $F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, $G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ ($\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^2$) jsou funkce třídy C^1 v okolí $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$, $F(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=G(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=0$ a*

$$\det\begin{pmatrix}\frac{\partial F}{\partial y_1}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) & \frac{\partial F}{\partial y_2}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\\ \frac{\partial G}{\partial y_1}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) & \frac{\partial G}{\partial y_2}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\end{pmatrix}\neq 0\,.$$

Pak existuje okolí U bodu $\boldsymbol{a}$ a funkce $f,g\in C^1(U)$ tak, že $\big(f(\boldsymbol{a}),g(\boldsymbol{a})\big)=\boldsymbol{b}$ a $F\big(\boldsymbol{x},f(\boldsymbol{x}),g(\boldsymbol{x})\big)=G\big(\boldsymbol{x},f(\boldsymbol{x}),g(\boldsymbol{x})\big)=0$ na U.

Příklad. Ověřte, že rovnice $x+y-u-v=0$, $ux+vy-2=0$ v okolí bodu $(1,-1,1,-1)$ definují funkce $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$ v okolí bodu $(1,-1)$. Určete $\operatorname{grad} u(1,-1)$.
Funkce $F(x,y,u,v)=x+y-u-v$, $G(x,y,u,v)=ux+vy-2$ jsou třídy $C^1(\mathbb{R}^4)$, bod $(1,-1,1,-1)$ vyhovuje podmínkám,

$$\det\begin{pmatrix}\frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v}\\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v}\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}-1 & -1\\ x & y\end{pmatrix}=x-y$$

je v bodě $(1,-1,1,-1)$ nenulový.
Parciálními derivacemi rovnic podle x,y dostaneme

$$\begin{array}{lrl}
\frac{\partial}{\partial x}: & 1-\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial x}=0 & \frac{\partial u}{\partial x}(-1,1)+\frac{\partial v}{\partial x}(-1,1)=1\\
 & \frac{\partial u}{\partial x}x+u+\frac{\partial v}{\partial x}y=0 & \frac{\partial u}{\partial x}(-1,1)-\frac{\partial v}{\partial x}(-1,1)=-1\\
\frac{\partial}{\partial y}: & 1-\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}=0 & \frac{\partial u}{\partial x}(-1,1)+\frac{\partial v}{\partial x}(-1,1)=1\\
 & \frac{\partial u}{\partial y}x+\frac{\partial v}{\partial y}y+v=0 & \frac{\partial u}{\partial x}(-1,1)-\frac{\partial v}{\partial x}(-1,1)=1
\end{array}$$

vyřešením: $\operatorname{grad} u(1,-1)=(0,1)$

Číselné řady

$\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}=\mathbb{R}^*$
$\mathbb{C}\cup\{\infty\}=\overline{\mathbb{C}}$
$a_1+a_2+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^n a_k$

Definice. Nechť $(a_k)_{k=1}^\infty$ je posloupnost čísel. (*Nekonečná číselná*) *řada* je výraz

$$a_1+a_2+a_3+\cdots=\sum_{k=1}^\infty a_k\,.$$

Číslo a_k se nazývá *k-tý člen* této řady.

Poznámka. Obecněji:
$\sum_{k=n}^\infty a_k$, $n\in\mathbb{N}$, $n\in\mathbb{Z}$
$\sum_{k\in M}a_k$, M je množina: $\sum_{k=1}^\infty a_k=\sum_{k\in\mathbb{N}}a_k$

Definice. Pro každé $n\in\mathbb{N}$ nazýváme $s_n=\sum_{k=1}^n a_k$ *n-tý částečný součet* řady $\sum_{k=1}^\infty a_k$. Pokud existuje $\lim_{n\to\infty}s_n=s$, pak ji nazýváme *součtem řady* a píšeme $s=\sum_{k=1}^\infty a_k$.
Řekneme, že řada:
konverguje, je-li $s\in\mathbb{C}$;
diverguje, je-li $s\in\{\pm\infty,\infty\}$;
osciluje, pokud $\lim_{n\to\infty}s_n$ neexistuje.

Příklady.
1) $\sum_{k=1}^\infty 1$ diverguje: $s_n=n$, $\lim_{n\to\infty}s_n=+\infty$.
2) $\sum_{k=1}^\infty(-1)^{k-1}=1-1+1-1+\cdots$ osciluje: $s_n=1$ pro n sudé, $s_n=0$ pro n liché.
3) $\sum_{k=1}^\infty 2^{-k}=\frac12+\frac14+\frac18+\cdots=\lim_{n\to\infty}(1-2^{-n})=1$ konverguje.
4) $\sum_{k=1}^\infty(-1)^{k-1}k=1-2+3-4+5-6+\cdots$ osciluje v $\mathbb{R}$, diverguje v $\mathbb{C}$: $s_{2n-1}=n$, $s_{2n}=-n$.

Poznámka. „Lepší" sčítání je $\lim_{n\to\infty}\frac1n\sum_{k=1}^n s_n$, pro příklad 2) dá součet $\frac12$.

Definice. *Aritmetická řada* s *diferencí* d:

$$a+(a+d)+(a+2d)+(a+3d)+\cdots=\sum_{k=1}^\infty\big(a+(k-1)d\big)\,.$$

Součty

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n a_k&=a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+a_n\\&=\tfrac12\left[(a_1+a_n)+(a_2+a_{n-1})+\cdots+(a_n+a_1)\right]\\&=\tfrac12 n(a_1+a_n)\,,\end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^\infty a_k=\begin{cases}+\infty, & d>0\text{ nebo }d=0\,,\ a>0\,,\\ -\infty, & d<0\text{ nebo }d=0\,,\ a<0\,,\\ 0, & d=0\,,\ a=0\,.\end{cases}$$

Příklad. $\sum_{k=1}^n k=1+2+\cdots+n=\frac12 n(n+1)$.

Definice. *Geometrická řada* s *kvocientem* q:

$$a+aq+aq^2+aq^3+\cdots=\sum_{k=1}^\infty aq^{k-1}\,.$$

Součty

$$\begin{aligned}s_n&=a(1+q+\cdots+q^{n-1})\\ qs_n&=a(\quad\ q+\cdots+q^{n-1}+q^n)\\ (1-q)s_n&=a(1-q^n)\\ s_n&=\begin{cases}\frac{1-q^n}{1-q}\,, & q\neq1\\ na\,, & q=1\end{cases}\end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^\infty aq^{k-1}=\frac{a}{1-q}\,,\quad |q|<1$$

$$\sum_{k=1}^\infty q^{k-1}=\begin{cases}\infty\,, & q\geq1\,,\\ \text{neex.}, & q\leq-1\end{cases}\quad\text{v }\mathbb{R}$$

$$=\begin{cases}\infty\,, & |q|>1\text{ nebo }q=1\,,\\ \text{neex.}, & |q|=1,\ q\neq1\end{cases}\quad\text{v }\mathbb{C}$$

Příklad. $\sum_{k=1}^\infty\frac{4}{3^k}=\frac{4/3}{1-1/3}=2$.

Příklad. $\sum_{k=2}^\infty\frac{1}{k(k-1)}=\frac12+\frac16+\frac1{12}+\cdots=$
$=\sum_{k=2}^\infty\big(\frac1{k-1}-\frac1k\big)=\lim_{n\to\infty}\big(1-\frac1n\big)=1$.

Věta. *Jestliže $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergují, $c \in \mathbb{C}$, pak*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k\,,$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} c \cdot a_k = c \sum_{k=1}^{\infty} a_k\,.$$

Věta. *Komplexní řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje právě tehdy, když konvergují řady $\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} a_k$ a $\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Im} a_k$. Pak*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} a_k + \mathrm{j} \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Im} a_k\,.$$

Věta (nutná podmínka konvergence). *Jestliže $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje, pak $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.*

Důkaz. $\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty}(s_k - s_{k-1}) = \lim_{k\to\infty} s_k - \lim_{k\to\infty} s_{k-1} = s - s = 0$.

Věta. *Je-li $a_k \geq 0$ pro každé $k \in \mathbb{N}$, pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ existuje.*

Důkaz. $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, (s_n) je neklesající, tj. $\lim_{n\to\infty} s_n$ existuje $(= \sup_{n\in\mathbb{N}} s_n)$

Věta (podílové kriterium). *Nechť $0 < a_k$ pro každé $k \in \mathbb{N}$. Je-li pro každé $k \in \mathbb{N}$*

1) $\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq q < 1$, pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje;

2) $\frac{a_{k+1}}{a_k} \geq 1$, pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverguje.

Důkaz.

1) $a_{k+1} \leq a_k q \cdots \leq a_1 q^k$, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_1 q^{k-1} = \frac{a_1}{1-q}$

2) $a_{k+1} \geq a_k \geq \cdots \geq a_1$, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \geq \sum_{k=1}^{\infty} a_1 = +\infty$

Poznámka. Stačí, aby byly nerovnosti splněny pro dostatečně velká k, tj. počínaje některým k_0.

Věta (limitní tvar podílového kriteria). *Nechť $0 \leq a_k$ pro každé $k \in \mathbb{N}$. Je-li*

1) $\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} < 1$, pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje;

2) $\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} > 1$, pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverguje.

Příklady.

1) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$ konverguje: $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{1}{k+1} \to 0$.

2) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{2^k}$ diverguje: $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{k+1}{2} \to +\infty$.

3) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ – kr. nerozhodne: $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{k}{k+1} \nearrow 1$ (diverguje).

4) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ – kr. nerozhodne: $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{k^2}{(k+1)^2} \nearrow 1$ (konv.).

Kriteria konvergence

Věta (srovnávací kriterium). *Nechť $0 \leq a_k \leq b_k$ pro každé $k \in \mathbb{N}$.*

1) Konverguje-li $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, pak i $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje.

2) Diverguje-li $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, pak i $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ diverguje.

Důkaz. $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $t_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$, $0 \leq s_n \leq t_n$
$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} s_n \leq \lim_{n\to\infty} t_n = \sum_{k=1}^{\infty} b_k$

Příklady.

1) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} = 1 + 1 = 2$ konverguje.

2) $\alpha \geq 2$, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq 2$ konverguje.

3) *harmonická řada*:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{1}{k} &= 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8} + \cdots \\ &\geq 1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8}\right) + \cdots \\ &= 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \cdots = +\infty\,.\end{aligned}$$

4) $\alpha \in (0, 1\rangle$, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ diverguje.

Věta (odmocninové kriterium). *Nechť $0 \leq a_k$ pro každé $k \in \mathbb{N}$. Je-li pro každé $k \in \mathbb{N}$*

1) $\sqrt[k]{a_k} \leq q < 1$, pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje;

2) $\sqrt[k]{a_k} \geq 1$, pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverguje.

Důkaz. 1) $a_k \leq q^k$, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} q^k = \frac{q}{1-q}$

2) $a_k \geq 1$, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \geq \sum_{k=1}^{\infty} 1 = +\infty$

Věta (limitní tvar odmocninového kriteria). *Nechť $0 \leq a_k$ pro každé $k \in \mathbb{N}$. Je-li*

1) $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} < 1$, pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje;

2) $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} > 1$, pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverguje.

Příklady.

1) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{\ln^k(k+1)}$ konverguje: $\sqrt[k]{a_k} = \frac{\sqrt[k]{3}}{\ln(k+1)} \to 0 < 1$.

2) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k^{10}}$ diverguje: $\sqrt[k]{a_k} = \frac{2}{\sqrt[k]{k}^{10}} \to 2 > 1$.

3) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^k$ kriterium nerozhodne: $\sqrt[k]{a_k} = \frac{k}{k+1} \nearrow 1$, $\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k\right]^{-1} = \mathrm{e}^{-1} \neq 0$ – diverguje.

Poznámky.

1) Stačí uvažovat $\limsup_{k\to\infty} < 1$, $\liminf_{k\to\infty} > 1$.

2) Odmocninové kriterium je účinnější (ne, pokud existují obě limity), ale někdy se hůře počítá.

Příklad. $a_{2k-1} = 2^{-k}$, $a_{2k} = 2^{1-k}$

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \cdots$

$\sqrt[k]{a_k} \to 2^{-1/2} < 1$ – konverguje podle odmocninového kr.

$\frac{a_{2k}}{a_{2k-1}} = 2$ – podílové kriterium nerozhodne

Věta (integrální kriterium)**.** *Nechť f je nezáporná nerostoucí funkce na $\langle 1,+\infty)$. Pak $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.*

Důkaz. $f(k) \geq \int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x \geq f(k+1)$,
$\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum_{k=1}^{\infty} f(k) \leq f(1) + \int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$

Příklady.
1) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ diverguje: $\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = [\ln x]_1^{\infty} = +\infty$.
2) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$ konverguje pro $\alpha > 1$: $\int_1^{\infty} x^{-\alpha}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha-1}$.
3) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}$ diverguje: $\int_1^{\infty} \frac{1}{x \ln x}\,\mathrm{d}x = [\ln \ln x]_1^{\infty} = +\infty$.

Příklad. Jaká je chyba $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{6}\pi^2$, pokud sečteme prvních 100 členů?
$\sum_{k=101}^{\infty} a_k \geq \int_{101}^{\infty} x^{-2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{100} = 0{,}01$
$\sum_{k=101}^{\infty} a_k \leq \int_{100}^{\infty} x^{-2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{101} \doteq 0{,}0099$

Věta (Leibnizovo kriterium)**.** *Nechť $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ je nerostoucí posloupnost nezáporných čísel. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots$ konverguje právě tehdy, když $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.*

Důkaz. $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$
$s_1 \geq s_3 \geq s_5 \geq \cdots$, $s_{2k+1} \to s'$,
$s_2 \leq s_4 \leq s_6 \leq \cdots$, $s_{2k} \to s'' \leq s'$
$s' - s'' = \lim_{k\to\infty}(s_{2k+1} - s_{2k}) = \lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = \lim_{k\to\infty} a_k$

Příklad. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots (= \ln 2)$ konverguje: střídají se znaménka, $\left(|a_k|\right)_k = \left(\frac{1}{k}\right)_k$ je nerostoucí, konverguje k 0.

Absolutní konvergence

Definice. Řekneme, že $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konverguje absolutně*, pokud konverguje $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$.

Příklad. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ konverguje, ne absolutně: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$ nekonverguje.

Věta. *Konverguje-li $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$, pak konverguje $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.*

Důkaz. 1) $a_k \in \mathbb{R}$: $a^+ = \max\{a, 0\}$, $a^- = \max\{-a, 0\}$
$a = a^+ - a^-$, $|a| = a^+ + a^-$, $0 \leq a^+, a^- \leq |a|$
$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konverguje …
$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+$, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^-$ konvergují (srovnávací kriterium) …
$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^+ - a_k^-) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ - \sum_{k=1}^{\infty} a_k^-$ konv.
2) $a_k \in \mathbb{C}$: $0 \leq |\operatorname{Re} a_k|, |\operatorname{Im} a_k| \leq |a_k|$
$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konverguje …
$\sum_{k=1}^{\infty} |\operatorname{Re} a_k|$, $\sum_{k=1}^{\infty} |\operatorname{Im} a_k|$ konvergují (srovnávací kr.) …
$\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Im} a_k$ konvergují podle 1) …
$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} a_k + \mathrm{j} \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Im} a_k$ konverguje

Poznámka. Pokud reálná řada konverguje neabsolutně, pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^- = +\infty$.

Poznámka. Srovnávací, podílové, odmocninové a integrální kriterium jsou kriteria absolutní konvergence:
$\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konv., $|a_k| \leq b_k$, pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konv. abs.
$\lim_{k\to\infty} |a_{k+1}/a_k| < 1$, pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konv. abs.
$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1$, pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konv. abs.

Definice. *Přerovnáním řady* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ nazýváme každou řadu $\sum_{k=1}^{\infty} a_{f(k)}$, kde $f : \mathbb{N} \xrightarrow{\text{na}} \mathbb{N}$ je prosté zobrazení.

Věta. *Jestliže řada konverguje absolutně, pak každé její přerovnání konverguje absolutně a má stejný součet.*

Důkaz.
1) $a_k \geq 0$: označme $m_n = \max\{f(1), \ldots, f(n)\}$
$\sum_{k=1}^{n} a_{f(k)} \leq \sum_{k=1}^{m_n} a_k$, tedy $\sum_{k=1}^{\infty} a_{f(k)} \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k$
opačná nerovnost: první řada je přerovnáním druhé pro f^{-1}
2) $a_k \in \mathbb{R}$:
$\sum_{k=1}^{\infty} a_{f(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{f(k)}^+ - \sum_{k=1}^{\infty} a_{f(k)}^- = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ - \sum_{k=1}^{\infty} a_k^- = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$
3) $a_k \in \mathbb{C}$: rozkladem na reálnou a imaginární část

Tvrzení. *Jestliže reálná řada nekonverguje absolutně a její členy konvergují k nule, pak každé reálné číslo je součtem některého přerovnání dané řady.*

Důkaz (náznak). $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^- = +\infty$, $c \in \mathbb{R}$
vybíráme nezáporné členy, dokud součet nebude $\geq c$
vybíráme záporné členy, dokud součet nebude $\leq c$
(postup opakujeme)

Poznámka. Podobně lze dosáhnout i součtu $\pm\infty$.

Věta (sčítání po částech)**.** *Nechť $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje absolutně. Pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1}$, $\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}$ konvergují (absolutně) a jejich součet je roven součtu původní řady.*

Důkaz. $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{2k-1}|, \sum_{k=1}^{\infty} |a_{2k}| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ … (absolutní) konvergence

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1} = a_1 + a_3 + \cdots = a_1 + 0 + a_3 + 0 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} l_k$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} = a_2 + a_4 + \cdots = 0 + a_2 + 0 + a_4 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} s_k$$

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} l_k + \sum_{k=1}^{\infty} s_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}$

Poznámka. Absolutně konvergentní řadu můžeme rozdělit na konečně mnoho různě přeskládaných částí, součet se přitom nezmění.